CHEMINS DE FER.

THÉORIE

DE LA RÉSISTANCE DES RAILS ;

PAR M. ROMBAUX ,

SOUS-INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Dans l'établissement des chemins de fer de Belgique, on a fait successivement usage des différents types principaux de rails saillants, en fer malléable. Lors de la construction des premières lignes, on employa des rails subondulés; plus tard, on leur substitua des rails parallèles en simple *T*; récemment on a adopté un rail en double *T*, à tables symétriques. Nous nous proposons particulièrement, dans ce rapport, de comparer la résistance de ces différents types.

Pour établir la discussion que nous avons en vue, nous présenterons d'abord, d'une manière générale, la solution des questions que nous avons à examiner; nous en déduirons ensuite, comme applications, les résultats particuliers aux rails belges. En suivant cette marche, nous pourrons reproduire l'ensemble de la théorie exposée à l'école du génie civil, et atteindre en même temps, de la manière la plus claire, le but que nous nous sommes proposé.

L'examen de la forme des rails comprend deux questions principales, relatives : la première, à la figure longitudinale; la seconde, au contour de la section transversale. En ce qui concerne la stabilité et l'économie de la matière, la forme longitudinale doit donner une égale résistance en chaque

point du rail, et la figure transversale une résistance *maxima* pour une aire donnée. Considérant les rails sous ce double point de vue, nous aurons à discuter les formes longitudinales subondulées et parallèles, et à comparer les résistances des sections transversales en simple T et en double T , qui sont les deux types essentiellement distincts, sous le rapport de la distribution de la matière relativement à l'axe d'équilibre.

Les rails parallèles, ainsi que nous le verrons bientôt, satisfont sensiblement à la condition d'égalité de résistance, entre deux supports consécutifs; mais comme les portées extrêmes, toutes choses égales d'ailleurs, se trouvent dans des conditions de résistance plus défavorables que les portées moyennes, nous aurons à déterminer le rapport qui doit exister entre les espacements des supports, pour que les fatigues *maxima* du rail soient égales dans les diverses portées.

Dans l'application des conditions de stabilité, nous procéderons par voie de vérification, en déterminant les charges que le nouveau rail à double table peut supporter pour diverses grandeurs de portées. Nous établirons, de cette manière, les modifications que l'on peut introduire dans les espacements actuels, eu égard à la plus grande résistance du rail nouveau.

La détermination de la charge d'un rail est assez difficile sur les chemins de fer à grandes vitesses, à cause des chocs des véhicules. Nous l'établirons d'abord en supposant que le mouvement des voitures est continu; nous aurons ensuite recours à l'expérience pour apprécier l'influence des chocs.

Nous présenterons, en terminant, la discussion de l'effet des chocs qui se manifestent au passage des joints. Cet examen nous servira à apprécier les modifications à apporter dans les résultats obtenus pour les portées extrêmes, en supposant le mouvement continu des charges, et à expliquer des cas très-fréquents de rupture, qui, au premier abord, paraissent en opposition avec la théorie.

Afin de pouvoir traiter ces questions isolément, nous commencerons par établir les formules générales de la flexion des rails; nous en déduirons ensuite les éléments qui nous sont nécessaires pour la solution des divers problèmes que nous venons d'énumérer.

FORMULES GÉNÉRALES DE LA FLEXION DES RAILS
PRISMATIQUES.

Dans l'établissement des formules de la flexion des rails, nous supposerons toujours que la forme longitudinale est prismatique; les résultats auxquels nous parviendrons de cette manière, seront directement applicables aux rails parallèles. Ils nous suffiront, d'ailleurs, pour comparer ces derniers aux rails subondulés, et pour faire ressortir le peu d'avantage qu'il y aurait à adopter la forme exacte d'égalé résistance.

Répartition des charges sur les portées.— Le moindre écartement de deux trains étant généralement de 4^m70, une seule roue peut agir à la fois sur une même portée; mais comme il arrive fréquemment qu'un support vient à céder, il convient d'établir les conditions de stabilité, en considérant la circonstance défavorable où la distance des appuis est égale à la somme de deux portées consécutives, et, dans ce cas, il peut y avoir lieu de tenir compte de l'action de deux trains à la fois, quand les espacements sont grands. Nous établirons d'abord les formules de la flexion produite par une seule charge; nous verrons ensuite au delà de quelle limite il faut avoir égard à l'action des deux roues, et les formules qu'il faut appliquer dans ce cas.

Mode de résistance des rails dans les diverses portées.— Le mode de résistance des rails varie suivant qu'il s'agit des portées intermédiaires ou des portées extrêmes.

Quand une charge agit entre deux supports moyens S_1, S_2 (pl. V, fig. 1), le rail, en fléchissant, tend à se relever en dehors

de la portée $S_1 S_2$; mais cet effet ne peut se manifester qu'entre des limites assez étroites , par suite du mode de fixation et de l'action de rappel exercée par les coussinets $S_1 S_2$. Nous admettrons, dans la théorie que nous allons présenter , que les tangentes à la courbe de flexion sont ramenées horizontales, aux supports S_1, S_2 , c'est-à-dire que le rail se trouve encasté en ces points. Cette hypothèse, qui n'est pas rigoureuse, en ne considérant qu'une seule charge , se rapproche beaucoup de la vérité, par suite de l'action des trains qui agissent sur les portées voisines de celle que l'on examine , et cette remarque est surtout applicable au cas où l'on admet qu'un support cède.

Dans les portées extrêmes $S_1 S_2$, le mode de résistance est moins avantageux que celui que nous venons de reconnaître dans les portées moyennes ; ici le rail ne présente plus qu'un seul encastrement en S_1 , et repose simplement par son about en S_2 .

Nous allons exposer successivement les lois de la flexion d'un rail pour les deux modes de réaction que nous venons de distinguer.

FLEXION DES PORTÉES MOYENNES.

Représentons par $S_1 M S_2$ la courbe affectée par une pièce prismatique , encastée horizontalement (fig. 2) aux supports S_1, S_2 , et fléchie par un effort vertical agissant en M . Imaginons , pour plus de facilité dans l'établissement des formules , qu'au lieu de l'encastrement en S_1 , la pièce s'appuie simplement sur ce support, et que sa tangente en ce point soit rendue horizontale par l'action d'un poids convenablement déterminé , agissant à l'extrémité M' de la pièce prolongée en $S_1 M'$.

Notation.—L'origine des coordonnées étant en S_1 , prenons l'horizontale $S_1 X$ et la verticale $S_1 Y$ pour axes des x et des

y , et nommons x , y et ρ les coordonnées et le rayon de courbure en un point m de la courbe ;

- π l'effort agissant en M ;
- π' la pression exercée sur le support S_1 ;
- π'' le poids appliqué en M'' ;
- a l'abscisse $S_1 B$ du point M ;
- a' l'espacement $S_1 S_2$ des supports ;
- a'' l'abscisse $S_2 B''$ du point M'' ;
- e le moment d'élasticité du rail considéré.

L'expression générale du rayon de courbure est donnée par

$$\frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

La courbure du rail étant toujours très-faible, on peut négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$ par rapport à l'unité, et prendre pour ρ la valeur suffisamment approchée,

$$\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Considérant la pièce après que la flexion s'est accomplie, et exprimant qu'il y a équilibre entre les forces de réaction développées dans une section m et les efforts extérieurs, on a, pour équation d'équilibre de rotation autour de l'axe d'équilibre, en un point quelconque m de la courbe $S_1 M$,

$$\frac{e}{\rho} = \pi(a-x) - \pi'(a'-x) + \pi''(a''-x);$$

ou encore.

$$\frac{e}{\rho} = \pi(a-x) + (\pi' - \pi'')x + \pi''a'' - \pi'a'.$$

Remplaçant ρ par $\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ dans l'équation précédente, intégrant

ensuite deux fois, en observant qu'à l'origine on a en même temps $x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, et $y=0$, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \pi(ax - \frac{x^2}{2}) + (\pi' - \pi'')\frac{x^2}{2} + (\pi''a'' - \pi'a')x;$$

$$y = \pi(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + (\pi' - \pi'')\frac{x^3}{6} + (\pi''a'' - \pi'a')\frac{x^2}{2}.$$

L'équation d'équilibre en un point m' de la courbe MS_1 , est exprimée par

$$\frac{\rho}{\rho} = -\pi'(a' - x) + \pi''(a'' - x);$$

$$\frac{\rho}{\rho} = (\pi' - \pi'')x + \pi''a'' - \pi'a'.$$

Substituant à ρ sa valeur, intégrant ensuite cette dernière équation en exprimant, dans la détermination des constantes, que les deux courbes S_2M et MS_1 doivent fournir les mêmes valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ et y , quand $x=a$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \pi\frac{a^2}{2} + (\pi' - \pi'')\frac{x^2}{2} + (\pi''a'' - \pi'a')x;$$

$$y = \pi\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) + (\pi' - \pi'')\frac{x^3}{6} + (\pi''a'' - \pi'a')\frac{x^2}{2}.$$

Lorsque $x=a'$, on doit avoir, dans les deux équations précédentes, $\frac{dy}{dx}=0$ et $y=0$, ce qui fournit, pour déterminer π' , a' , π'' et a'' , les deux conditions,

$$\pi\frac{a}{2} + (\pi' - \pi'')\frac{a'^2}{2} + (\pi''a'' - \pi'a')a' = 0,$$

$$\pi\left(\frac{a^2a'}{2} - \frac{a^3}{6}\right) + (\pi' - \pi'')\frac{a'^3}{6} + (\pi''a'' - \pi'a')\frac{a'^2}{2} = 0,$$

desquelles on tire :

$$\pi' - \pi'' = \pi\frac{a^2}{a'^3}(3a' - 2a),$$

$$\pi''a'' - \pi'a' = -\pi \frac{a^2}{a'} (2a' - a).$$

Substituant ces valeurs dans les équations de la courbe $S_2 M$, il vient,

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \pi \left(\frac{a' - a}{a'} \right)^2 \left\{ a - \frac{2a + a'}{a'} x \right\};$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \pi \left(\frac{a' - a}{a'} \right)^2 \left\{ ax - \frac{2a + a'}{2a'} x^2 \right\};$$

$$(3) \quad y = \pi \left(\frac{a' - a}{a'} \right)^2 \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{2a + a'}{6a'} x^3 \right\}.$$

Lorsque la charge π se meut de S_1 vers S_2 , la portion $S_2 M$ de la pièce présente successivement, mais dans un ordre inverse, les mêmes circonstances de flexion que la partie $S_2 M$, et nous pouvons nous borner à discuter cette dernière seulement. Il est d'ailleurs à remarquer que les résultats relatifs à la courbe $S_2 M$ deviennent applicables à l'autre portée $S_2 M$, en supposant l'origine des coordonnées en S_2 , et en remplaçant a par $a' - a$.

Discussion des fatigues maxima.—Les fatigues les plus fortes de la courbe $S_2 M$ ont lieu en S_2 et en M ; pour les comparer, nommons μ le coefficient d'extension, ou de contraction, applicable à la fibre la plus écartée de l'axe d'équilibre, et d la distance de cette fibre à l'axe. On a, entre ces quantités et le rayon de courbure au point m , la relation

$$\frac{d}{\rho} = \mu.$$

Éliminant ρ de l'équation (1), et y faisant successivement $x=0$ et $x=a$, on obtient, pour la fatigue exprimée par μ à l'encastrement S_2 ,

$$(4) \quad \frac{\mu}{d} = \pi \left(\frac{a' - a}{a'} \right)^2 a;$$

et pour celle au point d'application M ,

$$\frac{\mu}{d} = -\pi \left(\frac{a' - a}{a'} \right) \frac{2a^2}{a'}.$$

Du rapprochement de ces deux formules, il résulte que la fatigue en S_2 sera plus grande ou plus petite qu'en M , selon que l'on aura ,

$$a > \frac{2a'}{a'} \quad \text{ou} \quad a < \frac{a'}{2}.$$

D'où l'on conclut que les fatigues aux encastresments S_1 , S_2 , et au milieu de la pièce, sont égales, quand le poids est au milieu de la portée $S_1 S_2$, et que, pour toute autre position de la charge π , la fatigue est la plus forte à l'encastrement qui en est le plus rapproché.

Les fatigues en S_2 et en M varient avec l'abscisse a de la charge π . La fatigue de l'encastrement devient *maxima* pour $a = \frac{a'}{3}$, et celle du point d'application pour $a = \frac{a'}{2}$; substituant ces valeurs de a dans les expressions générales des fatigues en S_2 et en M , on obtient, pour la fatigue *maxima* de l'encastrement ,

$$(5) \quad \frac{16\pi}{d} = \frac{4}{27} a' \pi;$$

pour celle du point d'application du poids π ,

$$(6) \quad \frac{16\pi}{d} = \frac{4}{32} a' \pi.$$

La comparaison des deux formules précédentes fait voir que les fatigues *maxima*, à l'encastrement et au milieu de la portée, sont entre elles dans le rapport de 32 à 27, et que c'est de l'équation (5) qu'il faut déduire les conditions de stabilité d'une pièce destinée à être parcourue dans toute sa longueur par une charge π .

Point d'inflexion.— Les courbes $S_2 M$ et $S_1 M$ présentent chacune un point d'inflexion en I et I' (fig. 2). Pour déterminer l'abscisse x du point I , situé sur la première courbe, il faut poser $r = \infty$ dans l'équation (1), ce qui donne ,

$$x = \frac{aa'}{2a + a'}.$$

La discussion de cette expression fait voir que, lorsque la charge mobile π se meut de S_2 en S_1 , le point d'inflexion se déplace progressivement, à partir de S_2 jusqu'au tiers de la portée S_2 en S_1 , où il arrive quand π est parvenu en S_1 .

Flèche.—La flèche f du point d'application du poids π est fournie par la valeur que prend y , dans la formule (3), en faisant $x=a$, ce qui donne :

$$(7) \quad f = \frac{\pi}{3} \frac{a^3}{a'} \left(\frac{a'-a}{a'} \right)^3$$

La flèche *maxima* F , qui se produit pour une position donnée de la charge π , s'obtient en faisant varier x dans la formule (3), et posant $\frac{dy}{dx} = 0$; cette condition, introduite dans la formule (2), fournit pour l'abscisse de la flèche F ,

$$x = \frac{2aa'}{2a+a'}$$

abscisse double de celle du point d'inflexion. Substituant cette valeur dans la formule (3) et posant $y=F$, on a ,

$$(8) \quad F = \frac{\pi}{3} \frac{2a^3}{a'} \left(\frac{a'-a}{2a+a'} \right)^3$$

Pour que cette flèche soit admissible, il faut qu'elle tombe dans l'étendue de la première courbe $S_2 M$, c'est-à-dire que l'on ait $x < a$, ou

$$\frac{2aa'}{2a+a'} < a ;$$

d'où l'on tire ,

$$a > \frac{a'}{2}.$$

Quand cette condition n'est pas satisfaite, la flèche *maxima* doit se prendre dans la seconde courbe $M S_1$; elle se déduit de la formule (8), en y remplaçant a par $a'-a$.

La flèche *maxima* ψ , pour un même point quelconque déterminé par l'abscisse x , s'obtient à l'aide de la formule (3),

en y faisant varier a , et posant $\frac{dy}{dx} = 0$. Cette condition donne

$$a = \frac{a'^2}{3a' - 2x}$$

Substituant cette valeur dans l'équation (5), et posant $y = \psi$, on a

$$(9) \quad \psi = \frac{\pi}{8} \frac{2x^2(a' - x)^2}{(3a' - 2x)^3}$$

Pour que cette flèche ψ tombe dans l'étendue de la courbe S_2M , il faut avoir $a > x$, ou

$$\frac{a'^2}{3a' - 2x} > x.$$

D'où

$$x < \frac{a'}{2}.$$

Quand cette inégalité n'est pas satisfaite, il faut prendre la flèche ψ dans la courbe MS_2 , ou faire $x = (a' - x)$ dans la formule (9).

La flèche *maxima* ϕ , qui se produit dans la portée S_2S_1 par le passage de la charge π , peut se déduire des formules (8) et (9), en y faisant varier a ou a' . F devient *maxima* pour $a = \frac{a'}{2}$, de même que ψ pour $x = \frac{a'}{2}$; la flèche ϕ se manifeste donc au milieu de la portée : elle a pour expression,

$$(10) \quad \phi = \frac{\pi}{8} \frac{a'^2}{192}$$

Fatigue due à l'action de deux trains. — Les formules que nous venons de rappeler sont relatives au cas d'une seule charge π ; elles deviennent encore généralement applicables, quand un support tel que S_2 vient à céder, en faisant a' égal à la somme des deux portées S'_2S_2, S_2S_1 . Toutefois il est à remarquer que deux roues, en même temps, peuvent se placer alors dans l'intervalle de deux espacements, et il con-

vient de s'assurer si la fatigue due à l'action de deux trains n'est pas supérieure à celle obtenue pour une seule charge placée au tiers de la portée.

Conservons les notations déjà établies, et supposons que π , la plus forte des deux charges, soit la plus rapprochée de l'origine des coordonnées; nommons π la seconde charge, et a la distance constante des deux trains, l'abscisse du poids π étant a , celle de π sera $a+a$.

L'action du poids π introduit, dans la formule (4) de la fatigue de l'encastrement, un second terme, composé en π et $a+a$, de la même manière que la fatigue déjà trouvée pour une seule charge est formée avec π et a . On peut donc écrire directement, pour l'expression générale de la fatigue due aux deux charges π et π ,

$$\frac{1}{d} = \frac{\pi}{a'^2}(a'-a)^2 a + \frac{\pi}{a'^2}(a'-(a+a))^2(a+a).$$

Faisons, pour plus de simplicité, $\pi = n\pi$, n étant une fraction ou tout au plus l'unité, nous pourrions écrire

$$\frac{1}{d} = \frac{\pi}{a'^2} \left\{ (a'-a)^2 a + n(a'-a-a)^2(a+a) \right\}.$$

Remarquant que a est constant, et faisant varier a , on obtient, pour la valeur de l'abscisse qui détermine la position dans laquelle les deux trains produisent la fatigue *maxima*,

$$a = \frac{1}{3(1+n)} \left\{ 2(1+n)^2 a' - 3na - \sqrt{(1+n)^2 a'^2 - 9na^2} \right\}.$$

Substituant cette valeur de a dans la formule précédente, il vient, pour expression de la fatigue *maxima* de l'encastrement,

$$\frac{1}{d} = \frac{\pi}{27(1+n)^2 a'^2} \left\{ 2(1+n)^2 a'^2 + 27n(1-n)a'^2 + 2 \left((1+n)^2 a'^2 - 9na^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

7. VI.

3°

Pour que cette fatigue *maxima* se produise réellement, il faut que les deux roues soient placées à la fois dans l'intervalle a' , c'est-à-dire que l'on ait $a+a < a'$, ou

$$\frac{1}{3(1+n)} \left\{ 2(1+n)a' - 5na - \sqrt{(1+n)^2 a'^2 - 9na^2} \right\} + a < a'.$$

D'où l'on déduit,

$$a < \frac{2}{3}a', \text{ ou } a > \frac{3}{2}a.$$

Il est évident que, toutes les fois que ces conditions seront satisfaites, la fatigue due aux deux trains sera plus forte que celle produite par une seule charge, placée au tiers de la portée.

Prenant $a=1^m70$, on trouve $a' > 2^m55$, pour la condition qui doit être satisfaite pour qu'il y ait lieu de faire application des formules précédentes.

Dans les voitures et certaines locomotives présentant deux trains de roues motrices, on a $\pi = \pi$, ou $n=1$; dans les locomotives qui n'ont que 2 roues motrices, la charge de chacune de ces dernières est ordinairement double de celle d'une roue directrice, et l'on a alors $\pi = \frac{\pi}{2}$, ou $n = -\frac{1}{2}$.

Pour $n=1$, la condition particulière de stabilité est

$$(11) \quad \frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{34a^2} \left\{ 8a'^2 + (4a'^2 - 9a^2)^{\frac{1}{2}} \right\};$$

et, pour $n = \frac{1}{2}$,

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{9a^2} \left\{ a'^2 + a^2 + (a'^2 - 2a^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

FLEXION DES PORTÉES EXTRÊMES.

Dans une portée extrême $S_1 S_2$ (fig. 1), nous avons vu qu'un rail pourrait être considéré comme reposant simplement au coussinet d'about S_1 , et encastré horizontalement au coussinet

voisin S_2 ; soit $S_2 M S_1$ (fig. 3) la courbe qu'il affecte dans cette hypothèse, quand il est sollicité par une charge verticale π , agissant en M' .

Prenons pour coordonnées l'horizontale $S_2 X$ et la verticale $S_2 Y$, et conservons la notation admise dans le cas précédent.

Équations des courbes de flexion.—On aura pour les équations de la courbe $S_2 M$,

$$(12) \quad \frac{\epsilon}{\rho} \text{ ou } \frac{d^2 y}{dx^2} = \pi(a-x) - \pi'(a'-x),$$

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = \pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - \pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$(14) \quad y = \pi\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \pi'\left(a'\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Observant qu'il doit y avoir continuité dans les deux courbes au point M , on obtient, pour les équations de $M S_1$,

$$(15) \quad \frac{\epsilon}{\rho} \text{ ou } \frac{d^2 y}{dx^2} = -\pi'(a'-x),$$

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = \pi\frac{a^2}{2} - \pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \pi\left(\frac{a^2 x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - \pi'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

L'ordonnée y de l'équation (15) doit être nulle en S_1 , où $x=a'$; cette condition fournit, pour la pression π' exercée sur le support,

$$\pi' = \pi \frac{a^2(a'-a)}{2a'^2}.$$

Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, que cette valeur de π a été substituée dans les équations (12). (17).

Discussion des fatigues maxima.—Les fatigues les plus fortes ont lieu à l'encastrement S_2 , et au point d'application M du

pois π ; pour en obtenir les expressions , éliminons ρ de la formule (12), au moyen de la relation $\frac{d}{\rho} = \mu$, et faisons successivement $x=0$, $x=a$; il vient ainsi , pour la fatigue π à l'encastrement S_1 ,

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{2a'^2} a a' (a' - a) (2a' - a);$$

et pour celle du point d'application M ,

$$\frac{\mu}{d} = -\frac{\pi}{2a'^2} a^2 (a' - a) (3a' - a).$$

De la comparaison des formules précédentes , on conclut que la fatigue en S_1 sera plus grande ou plus petite que celle en M , suivant que l'on aura

$$a'(2a' - a) > \text{ ou } < a(3a' - a);$$

d'où ,

$$a > \text{ ou } < a'(2 - \sqrt{2}), \text{ ou } a > \text{ ou } < 0,5858 a'.$$

La fatigue la plus forte aura donc lieu à l'encastrement ou au point d'application, selon que la charge agira en deçà ou au delà des 0,5858 de la portée, à partir de l'encastrement.

Les fatigues , à l'encastrement et au point d'application , dépendent de la position de la charge π , et varient avec son abscisse a .

La fatigue à l'origine S_1 devient *maxima* pour

$$a = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a' = 0,423 a';$$

et, celle du point d'application, pour

$$a = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a' = 0,634 a'.$$

Ces valeurs de a étant substituées dans les expressions générales des fatigues en S_1 et en M , donnent, pour la fati-

gue *maxima* de l'encastrement S_1 ,

$$(19) \quad \frac{\mu}{d} = \frac{\pi a'}{3\sqrt{3}} = 0,1924 a' \pi;$$

et pour celle du point d'application M ,

$$\frac{\mu}{d} = \frac{3}{8}(2\sqrt{3}-3)a'\pi = 0,1747 a' \pi.$$

Ces deux formules font voir que les fatigues *maxima*, à l'origine S_1 et au point M , sont entre elles dans le rapport de 19 à 17 environ, et que c'est de l'équation (19) qu'il faut déduire les conditions de stabilité d'un rail dans ses portées extrêmes.

Point d'inflexion.— La première courbe $S_1 M$ présente un point d'inflexion I , dont l'abscisse est déterminée en posant $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ dans l'équation (12), ce qui donne

$$x = \frac{aa'(2a'-a)}{2a'(a'+a)-a^2}.$$

Cette valeur croît avec a , et le point d'inflexion se manifeste successivement de S_1 jusqu'au tiers de la portée, où il parvient quand la charge arrive en S_1 .

Flèches.— La flèche f au point d'application du poids π se déduit de l'équation (17), en y faisant $y=f$ et $x=a$; ce qui donne

$$(21) \quad f = \frac{\pi}{8} \frac{a^3}{12a^2} (a'-a)^2 (4a'-a).$$

La flèche *maxima* F , qui se produit pour une position donnée de la charge, a son abscisse déterminée par la condition $\frac{dy}{dx} = 0$, formule (16); ce qui fournit

$$x = a' \left(1 - \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}} \right).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (17), et y faisant

$y=F$, on a

$$(22) \quad F = \frac{\pi}{6} \frac{a^2}{a'} (a' - a) \sqrt{\frac{a' - a}{3a' - a}}$$

Pour que cette flèche tombe dans l'étendue de la courbe MS , comme nous venons de le supposer, il faut que l'on ait $x > a$, ou

$$a' \left(1 - \sqrt{\frac{a' - a}{3a' - a}} \right) > a;$$

d'où l'on tire

$$a' < a'(2 - \sqrt{2}), \text{ ou } a < 0,5858 a'.$$

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, la flèche F doit être prise dans la courbe S, M .

La flèche *maxima* ψ , en un point donné par son x , a son abscisse a déterminée, en exprimant, dans la formule (17), la condition $\frac{dy}{dx} = 0$, qui donne

$$a = \frac{2a'x(2a' - x)}{2a'^2 + (2a' - x)x};$$

et, en substituant,

$$(23) \quad \psi = \frac{\pi}{6} \frac{x^2(a' - x)(2a' - x)^2}{2a'^2 + x(2a' - x)^2}.$$

Cette dernière flèche devra aussi être prise dans la courbe S, M , quand on ne satisfera pas à la condition $a < x$, ou

$$\frac{2a'x(2a' - x)}{2a'^2 + (2a' - x)x} < x;$$

d'où l'on déduit

$$x > a'(2 - \sqrt{2}), \text{ ou } x > 0,5858 a'.$$

Les flèches f et ϕ deviennent *maxima* : la première, pour $a = a'(2 - \sqrt{2})$, et la seconde pour $x = a'(2 - \sqrt{2})$; elles ont alors pour expression commune,

$$\phi = \frac{\pi}{6} \frac{a'^5}{5} (17 - 12\sqrt{2}),$$

ou

$$(24) \quad \varphi = \frac{\pi}{4} a'^2 \cdot 0,0098124.$$

Formules relatives au cas de deux trains. — Quand la bille voisine de celle d'about vient à céder, on déduit encore les conditions de stabilité applicables à ce cas, en faisant, dans les formules précédentes, a' égal à la somme des 2 portées extrêmes. Nous allons établir ici, comme pour les portées moyennes, les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'il y ait lieu de considérer la fatigue résultant de l'action de deux trains agissant à la fois dans l'intervalle de deux portées extrêmes, lorsque l'avant-dernier support S_2 cède.

Ajoutons à la formule (18), qui fournit la fatigue μ de l'encastrement, un second terme exprimé en π et $a+a'$, de la même manière que celui dû à la seule charge π est composé en fonction de π et de a : on a, pour expression générale de la fatigue produite par les 2 poids π et π , séparés de l'intervalle a ,

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{2a^2} a(a'-a)(2a'-a) + \frac{\pi}{2a^2} (a+a') (a'-(a+a')) (2a'-a+a').$$

Faisant encore $\pi = n\pi$, on a

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{2a^2} \left\{ a(a'-a)(2a'-a) + n(a+a')(a'-a-a') (2a'-a-a') \right\}.$$

Différenciant par rapport à a , on obtient, pour l'abscisse de la première charge π , dans la position des deux trains qui produit la fatigue *maxima*,

$$a = \frac{1}{3(1+n)} \left\{ 3(1+n)a' - 3na - \sqrt{3(1+n)^2 a'^2 - 9na^2} \right\}.$$

Substituant cette valeur dans la formule précédente, on trouve, pour la fatigue *maxima* des deux trains,

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi}{54(1+n)^2 a'^2} \left\{ 27n(1-n)a^2 + 2 \left(3(1+n)^2 a'^2 - 9na^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Pour que cette fatigue *maxima* puisse se manifester, il faut qu'on ait $a + \alpha < a'$, ou

$$\frac{1}{3(1+n)} \left\{ 3(1+n)a' - 3n\alpha - \sqrt{3\alpha^2(1+n)^2 - 9n^2 + a} \right\} < a';$$

d'où l'on tire

$$a < \frac{a'}{\sqrt{3}} \sqrt{1+n}, \text{ ou } a' > \sqrt{\frac{3}{1+n}} \alpha.$$

Pour $n=1$, on a $a' > 1,22 \alpha$; et pour $n=\frac{1}{2}$, $a' > 1,41 \alpha$.

On voit, par ces conditions, que la limite de a' , à partir de laquelle les deux charges donnent une fatigue *maxima*, dépend du rapport n qui existe entre les 2 charges α et π . Quand α est très-petit relativement à π , et que l'on peut négliger n dans $\sqrt{1+n}$, la condition du *maximum* revient sensiblement à $a < \frac{a'}{\sqrt{3}}$, le second membre de cette inégalité exprimant la distance comprise entre l'about du rail et le point où une charge seule produit la fatigue *maxima* de l'encastrement.

Lorsque la condition $a' > \frac{\sqrt{3}}{n+1} \alpha$ est satisfaite, les deux trains donnent toujours lieu à une fatigue *maxima*; mais il est essentiel d'observer qu'elle peut être inférieure à celle d'une seule charge π agissant au point de la portée dont l'abscisse est $a' \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3}$; pour que la fatigue produite par deux trains soit plus grande que celle donnée par la formule (19) pour une seule charge π , il faut satisfaire à la condition

$$\frac{1}{34(1+n)^2 \alpha^2} \left\{ 27n(1+n)\alpha^2 + 2 \left(3(1+n)\alpha^2 - 9n\alpha^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} > \frac{a'}{3\sqrt{3}}$$

ou

$$4 \left\{ (1+n)^2 \alpha^2 - 3n\alpha^2 \right\}^{\frac{3}{2}} > \left\{ 2(1+n)^2 \alpha^2 - 3\sqrt{3} n(1+n)\alpha^2 \right\}^{\frac{3}{2}},$$

qui donne pour $n=1$

$$a' > \sqrt{\frac{5}{2(2-\sqrt{2})}}, a' > 1,60 \text{ m.}$$

et pour $n=1/2$,

$$a' > 1,54 \text{ m.}$$

Prenant $a=1^{\text{m}} 70$ et $n=1$, on a $a' > 2^{\text{m}} 72$, et l'on voit qu'il y aura évidemment lieu de tenir compte de la fatigue résultant de l'action de deux trains dans les portées extrêmes.

De la flexion des rails quand la bille d'about cède. — Pour compléter les formules générales relatives aux portées d'about, nous allons considérer les circonstances de la flexion d'un rail dans le cas où un support de joint vient à céder.

Lorsque le support extrême S_1 n'offre pas de résistance (fig. 4), les deux portées voisines $S_1 S_2$, $s S_1$, des rails qui aboutissent en S_1 , réagissent simultanément pour soutenir la charge π ; le rail $S_2 S_1$, encastré en S_2 et sollicité en M par le poids π , reporte une certaine pression π' sur l'extrémité S_1 du rail $S_1 s$, encastré en s ; conservant la notation des cas précédents, nous aurons $S_2 B = a$, $S_2 S = S s = a'$, etc.

Les formules générales des courbes $S_2 M$ et MS_1 sont évidemment les mêmes que celles trouvées en (12). . . (17), et n'en diffèrent que par la valeur de π' . Pour déterminer cette dernière pression dans les circonstances actuelles, il faut exprimer que les flèches en S_1 sont égales dans les courbes $S_2 S_1$ et $s S_1$.

Faisant $x=a'$ dans l'équation (17), on obtient, pour la flèche SS_1 de la courbe MS_1 ,

$$\frac{\pi}{6} \frac{a^2}{6} (3a' - a) - \frac{\pi'}{6} \frac{a'^2}{3}.$$

L'effort π' produit, dans la pièce $s S_1$, une flèche SS_1 , dont l'expression est

$$\frac{\pi'}{6} \frac{a'^2}{3}.$$

Exprimant l'égalité de ces flèches, on obtient

$$\pi' = \frac{a^3(3a' - a)}{4a'^3} \pi,$$

effort qui n'est que la moitié de celui trouvé précédemment pour maintenir l'extrémité S_1 dans l'horizontale $S_1 S$.

Pour la valeur de π' que nous venons de déterminer, la fatigue μ de l'encastrement S_1 est donnée par la formule

$$\frac{^s\mu}{d} = \frac{\pi}{4a'^3} (4a'^3 - 3aa' + a^2) aa',$$

et celle du point d'application M par

$$\frac{^m\mu}{d} = \frac{\pi}{4a'^3} (3a'^3 - 4aa' + a^2) a^2;$$

et comme on a toujours

$$(4a'^3 - 3a'a + a^2)a' > (3a'^3 - 4a'a + a^2)a,$$

il s'ensuit que la fatigue la plus forte a toujours lieu à l'encastrement S_1 ; cette fatigue n'est pas susceptible d'un *maximum*; elle atteint sa plus grande valeur quand $a = a'$ ce qui donne

$$(25) \quad \frac{^m\mu}{d} = \pi \frac{a'}{2},$$

pour la formule qui doit servir à établir les conditions de stabilité, dans le cas où la bille extrême vient à céder.

La flèche f , au point d'application M , a pour expression

$$(26) \quad f = \frac{\pi}{6} \frac{a^2}{24a'^3} \left\{ 8a'^3 - a(3a' - a)^2 \right\}.$$

La dépression *maxima* se produit en S_1 quand la charge est arrivée en ce point; elle a pour valeur

$$(27) \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \frac{a'^3}{6}.$$

FORME LONGITUDINALE DES RAILS.

La forme longitudinale des rails, considérée sous le rapport de l'économie de la matière, doit être telle qu'ils présentent aux charges destinées à les parcourir une égale résistance dans toute leur étendue; toutefois il convient que cette forme soit simple, afin de permettre une fabrication et une pose faciles. Nous allons rappeler successivement, et discuter ensuite, les diverses dispositions qui ont été employées dans la vue de réaliser les conditions que nous venons d'énoncer.

Des diverses formes longitudinales. — Les premiers rails saillants dont on a fait usage étaient en fonte; par suite de la rigidité de la matière qui les composait, ils ne pouvaient admettre plus de deux points d'appui, et reposaient simplement par leurs extrémités sur les supports destinés à les recevoir. Pour leur donner une égale résistance dans toute leur étendue, on augmente, vers le milieu des portées, la hauteur de la nervure, que l'on termine inférieurement par une courbe de forme elliptique.

Les rails en fonte présentaient de nombreux inconvénients, surtout pour les chemins de fer à grandes vitesses. On les remplaça par des rails saillants en fer malléable, comprenant généralement cinq ou six portées dans leur longueur. Croyant leur donner encore une forme d'égale résistance, on continua de subonduler la nervure entre les supports; mais cette disposition, qui était rationnelle pour les rails en fonte simplement appuyés à leurs extrémités, cessait de l'être pour les rails de plusieurs portées, à raison des encastresments qui se réalisent alors aux supports intermédiaires.

De nombreuses ruptures dans le voisinage des coussinets apprirent bientôt que c'était là l'endroit faible des rails subondulés; pour faire disparaître cette défectuosité, on fut conduit à donner à la nervure une hauteur uniforme dans toute son étendue, ce qui fournit les rails prismatiques ou

parallèles actuellement en usage. Outre une résistance plus égale en leurs différents points, les rails parallèles offrent une pose plus facile et une fabrication plus simple que les rails subondulés. Ils ne présentent d'ailleurs plus, comme les derniers, des solutions de continuité dans les fibres de la portion ondulée de la nervure.

Les rails prismatiques satisfont sensiblement à la condition d'égale résistance. — Les formules que nous venons de rappeler dans le chapitre précédent, établissent, d'une manière évidente, les avantages des rails parallèles sur les rails ondulés. La comparaison des formules 5 et 6 nous apprend que les fatigues d'un rail, au-dessus des coussinets d'encastrement et au milieu des portées moyennes, sont entre elles dans le rapport de 32 à 27, et que c'est par conséquent au-dessus des supports qu'un rail d'égale résistance devrait présenter la plus grande hauteur de nervure. Le rapprochement des formules 19 et 20 conduit aux mêmes conséquences, en ce qui concerne les portées extrêmes et le dernier encastrement.

Dans les portées moyennes, comme dans les portées extrêmes, nous avons fait remarquer que les points d'inflexion qui se manifestent lors du passage d'une charge, se déplacent successivement, à partir des coussinets d'encastrement, jusqu'au tiers de la portée : dans l'étendue du rail parcouru par les points d'inflexion, les mêmes fibres sont alternativement étendues et contractées, et cette action défavorable à la résistance concourt encore à faire augmenter la hauteur du rail dans le voisinage des coussinets. Faisons remarquer toutefois que les extensions les plus fortes correspondent à des contractions nulles, et *vice-versâ*, et que les actions dont nous venons de parler ne peuvent devenir pernicieuses que dans le cas où les limites du pouvoir élastique seraient dépassées.

Il résulterait des remarques précédentes, prises dans toute leur rigueur, que la forme longitudinale d'un rail d'égale ré-

sistance devrait être terminée inférieurement par une courbe concave dans la partie moyenne des portées, et convexe au-dessus des coussinets d'encastrement ; disposition tout à fait inverse de celle qu'on a suivie dans les rails subondulés. Mais cette forme, quoique rationnelle sous le rapport de la bonne distribution de la matière, ne présente pas d'avantages assez marqués pour la faire préférer aux rails prismatiques. Les différences de fatigue aux coussinets et au milieu des portées, sont, en effet, assez petites, et les ondulations, qui devraient être peu prononcées, ne permettraient pas de réaliser une économie de matière qui compensât les difficultés de fabrication et de pose inhérentes aux formes ondulées.

Il est à remarquer que, si notre hypothèse sur les encastresments absolus aux coussinets a quelque chose d'exagéré, ce ne peut être que pour augmenter la fatigue au-dessus des supports relativement à celle du milieu des portées. Si réellement les tangentes aux encastresments ne sont pas horizontales, ces fatigues se trouveront dans un rapport plus rapproché de l'unité que ceux auxquels nous avons été conduits dans ce qui précède, ce qui légitimerait encore davantage la forme prismatique des rails.

De l'accroissement de résistance dû aux encastresments.—

Le remplacement des rails en fonte par des rails en fer malléable est non seulement avantageux en ce que cette dernière matière est plus convenable pour les chemins de fer à grandes vitesses, mais encore à raison de l'accroissement de résistance qu'un rail de plusieurs portées permet d'obtenir par les encastresments aux coussinets intermédiaires.

Conservant les notations précédentes, on a pour la fatigue μ dans la section moyenne d'un rail simplement supporté par ses extrémités

$$\frac{\mu}{d} = \frac{\pi a'}{4}.$$

Rapprochant ce résultat des formules 3 et 19, on voit

que, toutes choses égales d'ailleurs, la résistance d'un rail simplement supporté est à celle d'une portée moyenne comme 16 est à 27, et à celle d'une portée extrême, comme 16 est à 21, rapports qui font voir l'influence avantageuse des encastresments.

Nous avons supposé, dans la comparaison précédente, que les appuis étaient fixes; mais il est à remarquer que les conditions de stabilité des rails de plusieurs portées doivent être établies pour la circonstance défavorable où un support vient à céder, et, dans ce cas, les portées simplement supportées, toutes choses égales d'ailleurs, présentent une résistance plus grande. Pour se convaincre de cette assertion, il suffit de comparer la formule que nous venons de rappeler à celles des n^{os} 25, 19, 5, l'espacement a' de ces deux dernières représentant la somme des deux portées voisines du support qui cède. Toutefois les rails reposant simplement par leurs extrémités, par suite des chocs résultant de la multiplicité des joints et de la ligne brisée qui se forme par la dépression des supports, présentent des inconvénients qui les font rejeter dans l'établissement des voies destinées à être parcourues à grande vitesse.

SECTION TRANSVERSALE DES RAILS.

La forme transversale des rails doit permettre une exécution facile au laminoir, présenter une surface de roulage d'une largeur suffisante pour ne pas faire empreinte sur les jantes des roues, et offrir les moyens de réaliser une fixation absolue dans le sens vertical. Dans les limites laissées par les conditions précédentes, on doit disposer de la forme de la section de manière à obtenir une résistance *maxima* pour une quantité donnée de matière.

Des types principaux de rails saillants.— Les diverses variétés de rails parallèles, qui sont les rails que nous considérerons à l'avenir, peuvent se rattacher, quant à leurs for-

mes transversales, à quatre types principaux, qui sont : les rails en simple *T*, (fig. 11), ceux en double *T* (fig. 13), les rails américains (fig. 12), et ceux en fer à cheval (fig. 14).

Dans les rails en simple *T*, la nervure est la partie essentiellement résistante, le champignon étant simplement destiné à présenter une surface de roulage d'une largeur convenable. Dans les rails en double *T*, on a eu particulièrement en vue d'écarter la matière de part et d'autre de l'axe d'équilibre, et l'on conçoit que cette forme doit être plus avantageuse que la précédente. Il est d'ailleurs à remarquer que les rails en simple *T* et ceux en double *T*, entraînent sensiblement aux mêmes sujétions dans leur mode de fixation, et le seul examen de leur résistance sera entièrement décisif dans le choix à faire entre les deux types.

Les rails américains reposent directement, par leur semelle inférieure, sur des supports isolés, auxquels ils se trouvent attachés au moyen de crochets. Les rails en fer à cheval, d'abord usités en Amérique, sont fixés de la même manière sur des longrines en bois. Ce dernier type n'est que le résultat d'une modification apportée dans les rails plats, pour éviter l'action directe des jantes sur les chevilles qui servent à les fixer. Primitivement ces rails présentaient peu de hauteur, la longrine supportant presque toute la charge à elle seule; dans ce dernier temps, on a augmenté la hauteur de leurs nervures, de manière à en former de rails saillants, capables de résister par eux-mêmes, et qu'on appuie simplement alors sur des supports isolés.

Considérés relativement à la répartition de la matière par rapport à l'axe d'équilibre, les rails américains et ceux en fer à cheval peuvent être assimilés aux rails à double table; et comme les conséquences auxquelles nous serons conduits, dans la discussion de ces derniers, leur seront applicables, nous pouvons nous dispenser d'en faire ici un examen particulier, et nous borner à discuter les deux types en double *T* et en simple *T* seulement.

Des conditions auxquelles il faut satisfaire dans la détermination de la section transversale. — Les conditions pratiques auxquelles on doit s'astreindre dans la détermination de la section transversale, sont relatives aux dimensions de la table et au rapport à maintenir entre l'épaisseur de la nervure et la hauteur du rail.

La largeur de la table, déterminée par la condition de ne pas faire d'impression sensible sur les jantes des roues, est généralement comprise entre 0^m06 et 0^m065. La partie saillante du champignon doit, en outre, ne pouvoir être séparée de la côte verticale; à cet effet, on lui donne, à l'extrémité, une hauteur suffisante, et on la termine inférieurement par une courbe qui la renforce près de la nervure, de manière à lui donner sensiblement une forme d'égale résistance. Dans le rail belge à double table (fig. 13), cette ligne inférieure, en partie droite, est inclinée à 45° avec l'axe du rail; la moindre épaisseur de la table, mesurée sur la tangente verticale *ab*, est généralement de 0^m014 à 0^m016. C'est cette dernière dimension qui a été admise pour le rail (fig. 13). La disposition que nous venons d'indiquer pour la table du nouveau rail en double *T*, paraît de beaucoup préférable à celle de l'ancien rail à simple *T* (fig. 11), dans lequel des disjonctions tendent encore à se manifester près de la nervure.

Pour augmenter la résistance du rail, on est porté à élargir la table et à lui donner moins d'épaisseur; mais cette modification présente plusieurs inconvénients. L'augmentation de largeur de la surface de roulage donne lieu à un frottement plus grand entre le rail et la jante, par suite de la conicité de cette dernière; la saillie devenant plus forte, la possibilité des disjonctions est aussi augmentée. Enfin si les fibres extrêmes de la table étaient trop écartées de la nervure, celle-ci ne pourrait plus leur transmettre en entier les extensions ou les contractions qu'elle doit leur communiquer lors de la flexion.

La nervure étant la partie résistante des rails en simple *T*, son épaisseur est généralement assez forte. Dans les

rails en double T , au contraire, la côte verticale n'est plus considérée que comme un intermédiaire destiné à établir une solidarité entre les tables, qui sont les parties essentiellement résistantes. La bonne répartition de la matière conduit donc à diminuer l'épaisseur de la côte verticale; mais on conçoit que cette réduction ne doit pas dépasser la limite au delà de laquelle il pourrait y avoir glissement dans ses fibres, quand elles réagissent pour établir entre la table contractée et celle étendue, la dépendance dont il vient d'être question. Le rapport le plus généralement admis entre l'épaisseur de la nervure et la hauteur du rail, est de $\frac{1}{7}$, environ, ce qui donne ordinairement 0^m015 à 0^m018 d'épaisseur à la nervure. Dans quelques rails, ce rapport a été porté à $\frac{1}{6}$; mais il est à craindre qu'alors la solidarité des tables ne soit qu'imparfaitement réalisée, et qu'elles ne tendent à fléchir isolément.

Détermination de la section de plus grande résistance.— L'examen des formules de stabilité que nous avons rappelées dans ce qui précède, fait voir que, en ce qui concerne les dimensions transversales, la résistance dépend uniquement du rapport $\frac{e}{d}$, auquel elle est proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs. La détermination de la forme de la section transversale de plus grande résistance, revient donc à trouver le contour de la figure d'une aire constante ω , pour laquelle $\frac{e}{d}$ atteint sa valeur *maxima*.

La discussion de ce problème ne peut être présentée d'une manière purement analytique, les dimensions auxquelles on serait ainsi conduit étant inadmissibles. En effet, pour suivre cette marche, il faudrait éliminer du rapport $\frac{e}{d}$ l'une des dimensions transversales du rail en fonction de la surface constante ω , et faire varier ensuite les autres; or, il suffit de se rappeler que, dans ω , le moment de chaque fibre est proportionnel au carré de sa distance à l'axe d'équilibre, pour concevoir que les solutions ainsi déduites tendraient à annuler

l'épaisseur de la nervure et à écarter indéfiniment la matière de l'axe d'équilibre, ce qui donnerait à la fois des dimensions exagérées, tant en largeur, à la table, qu'en hauteur à la nervure.

Au lieu de discuter analytiquement la forme de la figure de plus grande résistance, nous allons déterminer la valeur du rapport $\frac{e}{d}$ pour les diverses variétés de rails dont les dimensions tombent dans les limites d'une application pratique possible. En comparant les résultats ainsi obtenus, on pourra en déduire la forme de la section la plus avantageuse à tous égards, et atteindre le but vers lequel on doit tendre en général, la meilleure répartition de la matière. Pour terme de comparaison, nous attribuerons à l'aire constante ω la valeur particulière $0^m004622$, qui correspond au poids de 36 kilogrammes par mètre courant, poids admis pour le rail belge récemment adopté.

Rapport $\frac{e}{d}$ proportionnel à la résistance. — Afin de faciliter la détermination du rapport $\frac{e}{d}$, nous substituerons au contour courbe des rails, des droites qui s'en écartent peu; les résultats ainsi obtenus seront d'ailleurs sensiblement exacts. D'après cette convention, un rail en double T dont les tables sont inégales, peut être représenté par la figure 15.

Pour en déduire $\frac{e}{d}$, nommons :

- H la hauteur totale du rail,
- e l'épaisseur de la nervure,
- λ la largeur AB du champignon supérieur,
- h la hauteur de sa partie verticale BC ,
- c la hauteur EL de la partie inclinée CE ,
- $b = \frac{\lambda - e}{2}$ la saillie LC ,
- λ' , h' et b' , les dimensions analogues aux précédentes dans la table inférieure,
- x et y les distances respectives des fibrès extrêmes de AB et de $A'B'$, à l'axe d'équilibre mn .

Position de l'axe d'équilibre.—Exprimant que l'axe d'équilibre passe par le centre de gravité de la section totale du rail, on a, pour x et y ,

$$(28) \quad \begin{aligned} x &= \frac{H}{2} \left\{ \frac{b}{a} h(H-h) + c(5H-2(c+5h)) \right\} \\ &+ \frac{b'}{a'} \left\{ h'(H-h') + c'(3H-2(c'+5h')) \right\}, \\ y &= H-x. \end{aligned}$$

La surface a étant exprimée par,

$$a = eH + b(2h+c) + b'(2h'+c').$$

La fatigue par flexion des fibres inférieures sera plus grande ou plus petite, selon que l'on aura $y > < x$, et c'est la plus grande de ces deux quantités que l'on devra substituer à d dans le rapport $\frac{1}{d}$.

Expression du moment d'élasticité.—Pour prendre le moment d'élasticité par rapport à l'axe d'équilibre dont nous venons de déterminer la position, imaginons que la section transversale soit rapportée à deux axes rectangulaires, celui des abscisses étant l'axe d'équilibre même, et nommons u et v l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la section: l'expression du moment d'élasticité est donnée par l'intégrale double,

$$E \int du \int v^2 dv \text{ (1),}$$

prise positivement de part et d'autre des axes, et dans toute l'étendue de la section.

Appliquant cette formule à un rectangle tel que $ABIG$,

(1) $\frac{E}{10^4}$ exprime en kilogrammes la force capable de produire une extension ou une compression représentée par 0^m0001, pour 1^m de longueur, sur un mètre carré de section transversale, l'effort étant direct et la pièce prismatique.

on a, pour son moment pris par rapport à l'axe mn ,

$$\frac{E \lambda x^3}{3}.$$

Appelant m et n les distances CG et EH , la même formule donne pour le moment d'élasticité d'un trapèze tel que $CEHG$,

$$\frac{Eb}{12}(m^2+n^2)(m+n).$$

En appelant m' et n' les distances $C'G'$ et $E'H'$, le moment d'élasticité total du rail pourra s'écrire sous la forme,

$$(29) \quad \epsilon = \frac{E}{6} \left\{ 2\lambda x^3 - b(m^2+n^2)(m+n) \right\} + 2\lambda' y^3 - b'(m'^2+n'^2)(m'+n').$$

Formules relatives aux rails en simple T. — Les formules 28 et 29 sont générales et applicables à tous les types. Pour en déduire les formules particulières d'un rail en simple T , il suffit de faire $b'=0$ et $\lambda'=e$. Dans nos applications, nous avons toujours supposé $b=m-n$; l'on a alors pour un rail en simple table,

$$x = \frac{H}{2} - \frac{b}{6e} \left\{ 6h(H-h) + c(3H-2(c+3h)) \right\},$$

$$\epsilon = \frac{E}{6} \left\{ 2\lambda x^3 + 2e y^3 - (m^2 - n^2) \right\}.$$

Formules pour les rails en double T à tables égales. — Quand les deux tables sont égales, on a $x=y=\frac{H}{2}$, et, supposant toujours $b=m-n$,

$$\epsilon = \frac{E}{12} \left\{ \lambda H^3 - 4(m^2 - n^2) \right\}.$$

Les formules 28 et 29, prises dans toute leur généralité, sont applicables aux rails américains; elles le sont également aux rails en pont, en supposant les deux nervures rapprochées suivant l'axe vertical du rail.

Les diverses formules que nous venons d'établir se sim-

plifient, lorsque les lignes inclinées, telles que CE , $C'E'$, sont remplacées par des horizontales; pour obtenir les formules relatives à ce cas, il suffit de faire $c=0$, $c'=0$, $m=n$, $m'=n'$, dans les formules générales 28 et 29.

Nous avons indiqué, dans le dessin des sections pour lesquelles nous avons fait des applications, la figure rectiligne que nous avons substituée au contour courbe du rail (fig. 16 à 27); mettant, dans les formules précédentes, les valeurs numériques relatives à ces sections, on déterminera d'abord la position de l'axe d'équilibre, puis la valeur du moment d'élasticité ϵ , et l'on déduira de ces résultats le rapport $\frac{\epsilon}{d}$, dont la connaissance suffit pour comparer les résistances des diverses coupes transversales. En admettant pour F la valeur de 20 milliards, on trouve par ces calculs les valeurs inscrites dans le tableau suivant.

NUMÉRO des FIGURES.	MOMENT D'ÉLASTICITÉ.	RAPPORT $\frac{\epsilon}{d}$.	NUMÉRO des FIGURES.	MOMENT D'ÉLASTICITÉ.	RAPPORT $\frac{\epsilon}{d}$.
16	62,152 51	9,881 16	22	159,102 41	26,517 07
17	88,577 29	12,240 62	23	176,627 21	28,170 21
18	120,867 24	17,542 41	24	167,642 08	27,392 49
19	144,959 65	19,431 59	25	159,173 21	25,966 26
20	122,547 88	18,098 80	26	184,123 12	27,835 24
21	110,980 00	18,480 00	27	183,313 58	27,401 15

Le rail représenté par la figure 16 a été employé dans le premier établissement du chemin de fer de Namur à Charleroy; son poids est de 24,66 kilogrammes par mètre courant.

La figure 17 donne la section du rail dont on a fait généralement usage en Belgique de 1841 à 1845; son poids est

de 27,95 kilogrammes. Les coupes 18 à 27 correspondent à un même poids de 36 kilogrammes. La figure 22 représente le nouveau rail en double *T* adopté en Belgique.

Conséquences relatives aux rails en simple T. — En rapprochant les résultats relatifs aux fig. 20 et 21, on voit qu'un rail en simple *T* est moins résistant qu'une barre rectangulaire de même hauteur et de même poids. Pour expliquer cette différence de résistance, il suffit de remarquer que, dans un rail en simple *T*, l'axe d'équilibre se trouve plus éloigné des fibres inférieures de la nervure que des fibres supérieures de la table, et que, par suite, la matière située au-dessus de l'axe ne peut développer qu'une partie de l'effort dont elle est susceptible, quand les fibres inférieures ont déjà atteint leur limite de fatigue. Dans un rail en simple *T*, le champignon n'est donc qu'une simple sujétion, ayant pour objet la conservation des jantes, et il diminue d'autant plus la résistance que ses dimensions sont plus fortes (fig. 20 et 18). Pour accroître la résistance de ces rails il faut augmenter la hauteur de la nervure et réduire la table à ses dimensions *minima* (fig. 19).

Rails en double T et à tables symétriques. — Les rails en double *T*, à tables symétriques, présentent le double avantage d'avoir leur matière plus écartée de l'axe d'équilibre, et de pouvoir atteindre la même fatigue *maxima* dans les deux tables à la fois. Loin d'être une sujétion, les champignons sont ici les parties les plus résistantes du rail, et ils constituent de véritables nervures relativement à la côte verticale. Nous avons représenté, dans les figures 23 et 24, les changements que l'on pourrait faire, soit à la table, soit à la nervure du rail admis en Belgique (fig. 22), pour accroître sa force; mais il y a lieu de croire que l'augmentation de résistance qu'on réaliserait de cette manière ne serait pas en rapport avec les inconvénients qui résulteraient de l'atténuation des parties modifiées.

La comparaison des résultats relatifs aux fig. 22 et 20

fait voir que la résistance d'un rail en double T est à celle d'un rail en simple T , de même hauteur et de même poids, comme 3 est à 2 environ. Le rapport analogue pour les sections 22 et 19, est de 26 à 19. Ces rapprochements font assez ressortir les avantages des rails en double T sur ceux en simple T primitivement usités.

Rails en double T , à tables inégales.—La disposition symétrique des tables a principalement été adoptée dans la vue de pouvoir retourner les rails après la dégradation de la première surface, soumise à l'action directe des jantes; mais il ne paraît pas que cette prévision soit réalisable, et il y a, en effet, lieu de craindre qu'un rail qui a été fléchi, pendant un certain temps de la même manière, ne puisse pas résister aux flexions en sens inverse qu'il doit prendre après son retournement. Il est aussi à remarquer que l'enclave du coussinet devenant trop grande pour recevoir une table déformée et en partie usée, la fixation d'un rail retourné ne pourrait être bien absolue dans le sens vertical. Dès l'instant que le rail ne peut plus être retourné, la symétrie des tables n'est plus une condition essentielle à remplir, et on peut alors disposer de leurs formes et de leurs quantités relatives de manière de la manière la plus avantageuse à l'objet particulier de chacune d'elles.

La pression et le choc des jantes altérant la résistance des premières couches de métal, il convient, par compensation, d'augmenter la hauteur de la table supérieure, afin de diminuer sa fatigue par flexion. Une certaine partie du champignon destiné au roulage devant, en outre, être enlevée par l'usure, on doit aussi, pour ce motif, en augmenter l'épaisseur.

Quant à la forme de la table inférieure, on doit la déterminer en ayant égard à la fois à la résistance du rail et à la facilité de sa fixation dans le coussinet. La disjonction des portions saillantes de la table inférieure n'étant plus à craindre, on pourra remplacer la ligne ef , inclinée à 45° (fig. 22), par une autre $e'f'$, plus rapprochée de l'horizontale (fig. 26); par

cette disposition, la matière se trouve plus écartée de l'axe d'équilibre et la fixité mieux établie dans le sens vertical, lorsque, le coin n'étant pas parfaitement serré, le rail peut prendre un certain mouvement latéral.

La figure 25 indique la modification apportée à la coupe 22, en augmentant de 0^m002 la hauteur de la table supérieure et en rapprochant ses lignes inclinées de l'horizontale. La résistance de cette nouvelle section est moindre que celle du rail proposé (fig. 22); mais il est à remarquer que les modifications que nous avons en vue, peuvent se faire en augmentant même la résistance de ce dernier. Il suffit, pour atteindre ce but, d'accroître sa hauteur aux dépens de la table inférieure, tout en conservant un rapport convenable entre l'épaisseur de la nervure et l'élévation totale du rail. Les figures 26 et 27 donnent les coupes ainsi obtenues, en portant l'épaisseur de la table supérieure successivement à 0^m017 et 0^m018.

Comparaison du rail nouveau aux rails anciens, sous le rapport : 1° de la résistance. — La comparaison du nouveau rail à double table, du poids de 36 kilogrammes (fig. 22) et du rail en simple *T* du poids de 27^k95, précédemment usité en Belgique (fig. 17), fait voir que leurs résistances sont entre elles dans le rapport de 6,5 à 3, les quantités de matière étant sensiblement comme les nombres 4 et 3 : c'est-à-dire que la résistance du rail ancien est plus que doublée par une augmentation d'un tiers de matière.

Les résistances du rail nouveau (22) et de celui du chemin de fer de Namur (16), sont entre elles comme les nombres 8 et 3 fort sensiblement; leurs poids, dans le rapport de 4, 5 à 5 ou de 3 à 2.

2° de la rigidité. — La rigidité est aussi une condition essentielle à réaliser dans un rail; considéré sous ce point de vue, le type en double *T* présente encore de grands avantages sur celui en *T* simple. Les formules générales de la flexion font voir que, toutes choses égales d'ailleurs, les flèches sont entre elles dans le rapport inverse des moments d'élas-

ticité ». Les flèches, dans le rail nouveau, sont donc à celles du rail ancien, comme 1 est à 2 environ.

ESPACEMENT DES SUPPORTS.

L'équidistance des supports, qui était d'abord rendue obligatoire par la forme des rails ondulés, a encore généralement été admise lors du remplacement de ces derniers par des rails prismatiques. Cette disposition présente toutefois plusieurs inconvénients qu'il est possible de faire disparaître, maintenant que la position des coussinets n'est plus assignée par la forme longitudinale des rails.

Inconvénients des espacements égaux. — L'action des encastremements qui se réalisent aux supports intermédiaires, place les portées moyennes des rails dans des conditions de résistance plus avantageuses que les portées extrêmes, et il convient de diminuer ces dernières pour rendre les chances de rupture égales dans les divers espacements. La pratique prouve, en effet, que c'est dans les portées voisines des joints que les ruptures sont les plus fréquentes, et cette remarque a naturellement conduit à diminuer les espacements extrêmes.

La rigidité du rail est aussi moins grande aux extrémités qu'au milieu, et, toutes choses égales d'ailleurs, les supports extrêmes s'enfoncent plus facilement dans le sol que les supports intermédiaires. Après le passage de la charge, la bille d'about, relevée par le rail, ne prend plus appui sur le sol, et de ce porte-à-faux résulte une nouvelle cause de rupture dans les portées voisines du joint. Pour éviter ces inconvénients, on donne ordinairement plus de base aux billes d'about; lors de la pose, on les établit plus solidement que les autres; enfin, dans l'entretien, on les relève fréquemment en les calant avec du gravier. Toutes ces précautions entraînent, dans tous les cas, à une grande sujétion; elles peuvent être efficaces dans les premiers moments, mais, au bout de quelque temps, les effets qui tendent à se manifester se produi-

sent souvent avant qu'on ait pu les prévenir. D'ailleurs pendant les époques pluvieuses et aux époques de dégel, le relèvement des billes est extrêmement difficile et souvent illusoire. Pour que les billes reportent sur le sol des fatigues égales et tendent à y produire des tassements égaux, il convient de diminuer les portées extrêmes.

L'espacement des supports peut aussi être considéré sous le rapport des chocs qui se produisent dans les véhicules animés d'une grande vitesse. Par suite de la dépression des rails, les voitures décrivent dans le sens vertical une courbe ondulée dont les montées et les descentes se font en un temps très-court, et produisent par là un mouvement trépidatoire non-seulement incommode pour les voyageurs, mais en même temps nuisible pour la voie, les véhicules et la force motrice. Pour que ces effets restent compris entre les limites les plus étroites, il faut encore diminuer les espacements extrêmes, où les flèches qui se produisent sont beaucoup plus grandes que dans les portées moyennes.

De l'examen précédent il résulte que l'espacement des supports peut être déterminé de manière à réaliser une même résistance dans les diverses portées du rail, ou à rendre égales les actions que chaque support exerce sur le sol, ou enfin à restreindre les dépressions entre les limites les plus étroites. Nous allons considérer isolément chacune de ces conditions; nous pourrons ensuite adopter les espacements qui y satisfont le mieux, eu égard à leur plus ou moins grande importance.

Espacements des supports supposés fixes. — Si les supports pouvaient être fixés d'une manière absolue, les espacements devraient satisfaire aux conditions de rendre les diverses portées également résistantes et les dépressions égales.

Appelant a_1 l'espacement $S_1 S_2$ des supports extrêmes (fig. 4), a_x celui des supports intermédiaires $S_1 S_2, S_2 S_3, S_3 S_4$ etc. . μ_1 et μ_x les fatigues *maxima* dans ces espacements, les formules 49 et 5 nous donneront respectivement

$$\mu_1 = \frac{d}{6} \pi 0,1924 a_1,$$

$$(30) \quad \mu_3 = \frac{d}{\epsilon} \pi \frac{4}{27} a_3,$$

Exprimant l'égalité de μ_1 et de μ_3 , on a, pour déterminer les espacements a_1 et a_3 , qui donnent une même fatigue aux portées moyennes et extrêmes,

$$0,1924a_1 = \frac{4}{27}a_3;$$

d'où

$$a_1 = 0,77a_3.$$

Les flèches *maxima* des espacements a_1 , a_3 ont pour expression, formules 24 et 40,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{\epsilon} 0,009812 a_1^3,$$

$$(31) \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{\epsilon} \frac{1}{192} a_3^3.$$

Pour que ces flèches soient égales, il faut qu'on ait

$$0,009812a_1^3 = \frac{1}{192}a_3^3.$$

$$a_1 = 0,81a_3.$$

Du rapport qui doit exister entre les portées quand les supports peuvent céder : 1° Pour réaliser une égale résistance dans les divers espacements. — On voit qu'on pourrait satisfaire à la fois, et fort sensiblement, aux deux conditions des fatigues et des flèches égales.

Le cas que nous venons de considérer doit être pris comme purement hypothétique et se rapportant à un état de perfection dont on ne peut que s'approcher en pratique. En réalité, les supports cèdent lors du passage des charges, et l'expérience prouve que les flèches qui tendent à s'y manifester peuvent souvent se produire en entier, par suite du défaut de résistance du sol; or, ce cas est le plus défavorable à la stabilité du rail, et c'est par conséquent celui qu'il im-

porte de considérer, si l'on veut que les chances de rupture soient égales dans les diverses portées. Pour toutes les questions, sous ce nouveau point de vue, nous devons supposer que chacun des supports vient à céder isolément, et exprimer que les fatigues qui se produisent alors sont égales entre elles.

Supposons, pour fixer les idées, que le rail admette cinq portées, et soit a_1 l'espacement extrême $S_1 S_5$ (fig. 1), a_2 l'espacement suivant $S_2 S_4$, a_3 celui du milieu.

Quand le support S_1 cède, la fatigue *maxima* M_1 a lieu à l'encastrement S_1 ; elle est exprimée (25) par

$$(32) \quad M_1 = \frac{d}{4} \pi \frac{1}{2} a_1.$$

Lorsque le support S_5 vient à céder, la fatigue *maxima* M_5 a lieu à l'encastrement S_5 ; elle est donnée par la formule 19, en y faisant $a' = a_1 + a_2$, ce qui fournit

$$(33) \quad M_5 = \frac{d}{4} \pi 0,1924 (a_1 + a_2).$$

Enfin la fatigue *maxima* M_3 , qui se produit aux encastresments S_2 ou S_4 quand le support S_3 manque, se déduit de la formule 5, en y faisant $a' = a_2 + a_3$, ce qui donne

$$(34) \quad M_3 = \frac{d}{4} \pi \frac{4}{27} (a_2 + a_3).$$

Exprimant que les fatigues M_1 , M_3 , M_5 sont égales, on a pour déterminer les trois quantités a_1 , a_2 , a_3 les deux conditions

$$\frac{1}{2} a_1 = 0,1924 (a_1 + a_2) = \frac{4}{27} (a_2 + a_3).$$

En supposant $a_3 = 1$, on a $a_2 = 0,900$, $a_1 = 0,563$.

2° *Pour que les dépressions des supports soient égales.* — L'espacement des supports, considéré relativement aux pressions reportées sur la voie, ne peut se traiter d'une manière rigoureuse, la loi de la résistance du sol n'étant pas

susceptible de s'exprimer analytiquement. Toutefois remarquons que la fatigue du terrain est d'autant plus forte que la flèche qui tend à se produire à un support, par le passage d'une charge, est plus grande; en exprimant que ces flèches sont égales, les pressions reportées sur la voie seront sensiblement les mêmes.

La flèche x , qui se produit en S_1 quand ce support cède, est exprimée (formule 27) par

$$(35) \quad x_1 = \frac{\pi}{6} \frac{a_1^3}{6}.$$

Quand le support S_1 manque, la flèche *maxima* x_1 qui s'y produit, se déduit de la formule 23, en y faisant $x = a_1$ et $a_1 = a_1 + a_2$, ce qui donne

$$(36) \quad x_1 = \frac{\pi a_1 a_2^3 (2a_1 + a_2)^3}{3(2a_1^3 + 3a_2(2a_1 + a_2)^3)}$$

Pour que cette expression soit admissible, on voit qu'il faut satisfaire à la condition

$$a_2 > 0,5838(a_1 + a_2).$$

La flèche *maxima* x_2 , qui se manifeste en S_2 quand ce support cède, est donnée par la formule 9, en y faisant $a_1 = a_1 + a_2$ et $x = a_2$, car il est évident que l'on aura $x < \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. On obtient ainsi

$$(37) \quad x_2 = \frac{\pi 2 a_1^2 a_2^3}{3(3a_1 + a_2)^3}.$$

Exprimant l'égalité des flèches x_1 , x_2 , x_3 , on obtient les deux conditions

$$a_1^3 = \frac{2a_1 a_2^3 (2a_1 + a_2)^3}{(2a_1^3 + 3a_2(2a_1 + a_2)^3)} = \frac{4a_1^3 + a_2^3}{(3a_1 + a_2)^3},$$

qui sont satisfaites par $a_2 = 1$, $a_1 = 0,978$, $a_3 = 0,623$.

Les équations précédentes sont assez compliquées; on peut les remplacer par d'autres, plus simples en exprimant, à

l'aide des formules 27, 21, 7, l'égalité des flèches qui se produisent aux supports quand les charges agissent directement au-dessus d'eux, on a ainsi les deux conditions

$$a_1 = \frac{a_1^2 a_2^2 (4a_1 + 3a_2)}{2(a_1 + a_2)^2} = \frac{2a_2^2 a_1^2}{(a_2 + a_1)^2}$$

desquelles on déduit pour $a_2=1$, $a_1=0,983$, $a_1=0,623$, valeurs très-sensiblement égales aux précédentes.

3° *Pour restreindre les flexions du rail dans les limites les plus étroites.* — Ainsi que nous le verrons bientôt dans les applications numériques, les flèches qui se produisent entre les billes supposées fixes sont toujours très-petites et n'offrent guère d'inconvénients en ce qui concerne les trépidations; il n'en est plus de même quand les supports viennent à manquer, les flèches *maxima* qui se manifestent alors acquièrent une valeur assez considérable, et ce sont celles-là qu'il importe de restreindre entre les limites les plus étroites, en exprimant qu'elles sont égales entre elles.

Les flèches *maxima* φ_1 , φ_2 , φ_3 , qui se produisent dans l'intervalle de deux portées consécutives, quand les supports S_1 , S_2 , S_3 (fig. 1) viennent à céder, se déduisent respectivement des formules 27, 24 et 10, en y faisant $a'=a_1$, $a'=a_1+a_2$ et $a'=a_1+a_2$, ce qui donne

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \frac{a^2}{l^2}$$

$$(38) \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} 0,0098124(a_1 + a_2)^2,$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{6} \frac{1}{192}(a_1 + a_2)^2.$$

Pour que ces flèches soient égales, il faut satisfaire aux deux conditions

$$32a_1^2 = 1,88398(a_1 + a_2)^2 = (a_2 + a_1)^2.$$

Pour $a_2=1$, on a $a_1=0,978$, $a_1=0,623$.

Ces valeurs, jusqu'à la 3^e décimale, sont les mêmes que celles déjà trouvées en exprimant que les dépressions *maxima* des supports devaient être égales entre elles, ce qui résulte de ce que par ces dernières conditions les appuis se trouvent placés dans des positions voisines des points où se produisent les flèches *maxima*.

On voit d'après ce qui précède, que les espacements varient peu, quel que soit le point de vue sous lequel on les envisage, et l'on pourra satisfaire convenablement à toutes les exigences à la fois, en prenant les portées dans le rapport des quantités suivantes :

$$a_3=1, \quad a_2=0,94, \quad a_1=0,60.$$

Pour un rail de 4^m50 (5 portées de 0^m90), comme on est dans l'usage de les fabriquer, les espacements qui paraissent les plus convenables à tous égards, sont

$$a_3=1^m10, \quad a_2=1^m04, \quad a_1=0,66.$$

Pour rendre plus sensibles les avantages de ces espacements sur ceux de 0^m90, nous allons donner les résultats numériques des formules que nous venons de discuter.

Nous prendrons $\epsilon=159102$, $d=0^m06$, valeurs relatives du rail à double table (fig. 22), et nous supposerons $\pi=4000$ kil.

Faisant $a_3=1^m10$, $a_2=1^m04$, $a_1=0,66$, dans les formules (32). . (38) on obtient, dans le cas des espacements inégaux,

FATIGUES MAXIMA.	DÉPRESSIONS des SUPPORTS.	FLÈCHES MAXIMA.
$M_1 = 0,000498$	$\chi_1 = 0,001205$	$\varphi_1 = 0,001205$
$M_2 = 0,000493$	$\chi_2 = 0,001204$	$\varphi_2 = 0,001215$
$M_3 = 0,000478$	$\chi_3 = 0,001280$	$\varphi_3 = 0,001285$

Posant $a_1 = a_2 = a_3 = 0^m90$ dans les mêmes formules, 52 à 28, on a, pour le cas des espacements égaux,

FATIGUES MAXIMA.	DÉPRESSIONS des SUPPORTS.	FLÈCHES MAXIMA.
$M_1 = 0,000679$	$\chi_1 = 0,003055$	$\phi_1 = 0,003055$
$M_2 = 0,000522$	$\chi_2 = 0,001336$	$\phi_2 = 0,001438$
$M_3 = 0,000402$	$\chi_3 = 0,000764$	$\phi_3 = 0,000764$

La comparaison de ces dernières valeurs fait voir combien la rigidité du rail et sa fatigue varient dans les diverses portées, quand les supports sont équidistants, tandis qu'elles sont sensiblement égales pour les espacements inégaux.

Quand les supports ne cèdent pas, comme nous venons de le supposer, les fatigues et les dépressions deviennent moindres vers les extrémités du rail qu'en son milieu; admettant pour limite extrême, que les supports soient rigoureusement fixes, représentant par μ_1, μ_2, μ_3 , les fatigues *maxima* des 1^{er}, 2^o et 3^o espacements, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 les flèches *maxima* qui s'y produisent, on obtient, à l'aide des formules 30 et 31, pour les espacements inégaux, $a_1 = 0^m66, a_2 = 1^m04, a_3 = 1^m10$,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,000192, & \phi_1 &= 0,000074, \\ \mu_2 &= 0,000232, & \phi_2 &= 0,000143, \\ \mu_3 &= 0,000246, & \phi_3 &= 0,000174; \end{aligned}$$

et pour les espacements égaux de 0^m90 ,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,000261, & \phi_1 &= 0,000180, \\ \mu_2 &= \mu_3 = 0,000201, & \phi_2 &= \phi_3 = 0,000095. \end{aligned}$$

Ces résultats prouvent que, en supposant même les supports fixes, les fatigues et les flèches sont encore moindres, dans les espacements inégaux, que dans ceux de 0^m90 . Dans le 1^{er}

cas, les fatigues et les flexions *maxima* se manifestent au milieu du rail, et non plus aux extrémités, où elles sont encore souvent accrues par les chocs qui se produisent au passage des joints.

Les espacements inégaux auxquels nous venons d'être conduits, sont assez différents de ceux qu'on adopte généralement dans la pratique, et il convient de nous assurer, en interprétant nos hypothèses, s'il n'y pas lieu de les modifier.

Dans la discussion que nous venons d'établir, nous avons toujours supposé que le rail était simplement appuyé, par ses extrémités, sur les coussinets d'about; si cette hypothèse était trop défavorable à la résistance des portées extrêmes, on pourrait augmenter les valeurs trouvées pour a_1 . Toutefois il est à remarquer que, le rail pénétrant peu dans le coussinet de joint, et ne s'y trouvant guère fixé que par ses fibres moyennes, dont le mouvement par flexion est très-faible, il est probable que l'assemblage des abouts n'a qu'une influence tout à fait secondaire sur la résistance des portées extrêmes, et qu'il convient de n'en pas tenir compte.

En ce qui concerne les hypothèses faites sur les encastremens, il y aurait lieu de diminuer les portées moyennes, si les tangentes aux coussinets intermédiaires n'étaient pas ramenées horizontales, comme nous l'avons supposé; mais ces conditions, favorables à la résistance, se trouvent bien sensiblement réalisées lorsque l'on considère l'ensemble de deux portées consécutives, ainsi que nous l'avons fait pour déterminer les espacements dont nous voulons apprécier la convenance.

D'un autre côté, les chocs qui se produisent souvent au passage du joint, mènent à des modifications en sens inverse des précédentes.

Dans la partie moyenne des rails, la courbe décrite par le centre de gravité des charges est continue et donne lieu à une action centrifuge verticale dont l'effet est assez faible, en supposant même que les supports intermédiaires puissent

céder ; mais lorsque la bille d'about vient à manquer, cette courbe y forme un jarret, dans lequel il peut se manifester un choc assez intense.

Quel que soit le mode d'assemblage des abouts, les tables des deux rails consécutifs se trouvent souvent à des hauteurs différentes, et produisent des chocs très-pernicieux lors du passage des charges.

Enfin, lorsque les rails sont coupés carrément, le passage des roues au-dessus du joint peut encore donner lieu à des chocs ; toutefois leur intensité est très-faible, et même négligeable, ainsi que nous le verrons plus tard.

Il y a lieu de croire, eu égard à ces dernières considérations, que les rapports entre les espacements des supports peuvent être conservés tels que nous les avons obtenus.

Remarquons encore qu'il ne conviendrait nullement, pour se rapprocher de la vérité, de prendre une moyenne entre les résultats auxquels nous sommes parvenus en imaginant les supports d'abord fixes et en les supposant ensuite susceptibles de s'enfoncer dans le sol. Les espacements de 1^m40, 1^m04, 0^m66, ainsi que nous l'avons fait voir, permettent une dépression des appuis de 0^m0012 environ, et ce n'est que lorsqu'on pourra avec certitude l'empêcher de se produire en entier, qu'il conviendra d'augmenter les parties extrêmes par rapport à celles de la partie moyenne du rail, de manière à se rapprocher des espacements relatifs au cas des supports fixes ; mais une pareille perfection d'entretien n'est pas réalisable.

CONDITIONS DE STABILITÉ DES RAILS.

Pour obtenir la résistance d'un rail, exprimée en kilogrammes, il suffit de déterminer la charge π au moyen des formules (5), (19) et (23), en y remplaçant d par sa valeur particulière, et en attribuant au coefficient μ la valeur ex-

trême qu'il convient de ne pas dépasser afin de rester dans les limites de l'élasticité.

• *De la limite de fatigue μ .* — Les expériences faites par l'ingénieur Barlow prouvent que, pour des charges momentanées, la limite du pouvoir élastique correspond à un allongement de 0,00096 environ. Des résultats donnés par le même auteur sur la dépression des rails, on conclut que, par suite des chocs causés par les soubresauts des véhicules, les flèches peuvent être portées dans ce cas à la moitié en sus de la flexion moyenne, cette dernière étant d'ailleurs sensiblement égale à celle que produit la charge sans mouvement. On déduit de l'ensemble de ces deux observations qu'il ne convient pas d'attribuer au coefficient μ une valeur qui dépasse $\frac{2}{3}$ 0,00096 ou 0,00064, la charge étant supposée en repos.

Toutefois il est à remarquer que les expériences que nous invoquons se rapportent à des flèches observées entre deux supports consécutifs, dans l'intervalle desquels rien ne s'oppose à l'augmentation de flexion due au choc, et les conséquences qu'on peut en tirer ne sont plus rigoureusement applicables au cas des portées doubles que nous voulons considérer pour établir les conditions de stabilité d'un rail. Quand une bille cède complètement et qu'elle se relève après le passage de la roue, elle est déjà revenue à une certaine hauteur au-dessus du sol quand la charge est au point de la portée où elle produit la fatigue *maxima* à l'encastrement; mais le porte-à-faux qui se forme ainsi n'est pas suffisant pour permettre à la flèche d'augmenter de la moitié de sa valeur, et la réduction que nous avons fait subir à la limite de fatigue, eu égard à cette dernière considération, se trouve être un peu exagérée.

Pour prouver les assertions précédentes, imaginons qu'une bille telle que S_1 vienne à céder; S_1 étant au milieu de S_2 et S_3 , la flèche *maxima* qui s'y produit quand la charge y agit directement, est

$$\phi = \frac{\pi}{4} \frac{1}{192} a'^3,$$

a' étant la somme des deux portées $S_1' S_2'$. La flèche au milieu, quand la charge est au tiers des deux portées, est donnée par

$$\phi' = \frac{\pi}{4} \frac{5}{1296} a'^3;$$

d'où l'on déduit

$$\phi' : \phi = 20 : 27.$$

Pour que la flèche qui se produit quand la charge est au tiers, puisse augmenter de moitié, il faut que ϕ' puisse croître dans le rapport de 20 à 30 : or, la bille intermédiaire reprend déjà appui sur le sol quand cet accroissement de flèche s'est opéré dans la proportion de 20 à 27 ; à partir de cet instant, la flexion continue à se manifester entre deux supports consécutifs, et ses effets sont alors beaucoup moins pernicieux.

Quand c'est l'avant dernière bille S_2 qui cède, si l'on représente encore par a' la somme des deux portées extrêmes, et, si l'on remarque que S_2 se trouve sensiblement dans la position où se produit la flèche *maxima* dont l'abscisse est $(2 - \sqrt{2}) a'$, on a, pour la dépression de S_2 ,

$$\phi = \frac{\pi}{4} \frac{a'^3}{8} (17 - 12\sqrt{2}).$$

La flèche de la même bille, quand la charge produit sa fatigue *maxima*, c'est-à-dire quand son abscisse est $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} a'$, a pour expression

$$\phi' = \frac{\pi}{4} \frac{a'^3}{27} \left\{ 36 - 27\sqrt{2 - 17\sqrt{3 + 13\sqrt{6}}} \right\};$$

d'où l'on tire encore,

$$\phi' : \phi = 0,244 : 0,263 ;$$

et l'on voit que, dans le cas actuel, la réduction de fatigue est encore plus exagérée que dans le cas précédent.

En tenant compte des remarques que nous venons de faire, on pourra porter la limite de fatigue à 0,0007 ; il est même très-probable que l'on pourrait, sans inconvénient, aller au delà, dans les premiers moments de l'établissement de la voie ; mais comme l'action des chocs altère la résistance du fer en détruisant son nerf, et que d'ailleurs le champignon est destiné à être usé en partie, il convient d'attribuer à μ une valeur convenablement restreinte. Par ces motifs, nous nous en tiendrons à la limite 0,0007.

Vérification des conditions de stabilité du rail nouveau.—

Dans un chemin de fer de quelque étendue et traversant des terrains essentiellement différents, il convient, par économie, de proportionner, dans chaque cas, le nombre de supports d'un rail à la résistance plus ou moins grande du sol. L'entretien de la voie, à cause des difficultés d'assèchement, est toujours plus pénible dans les tranchées que dans les remblais, et l'on remarque également que la rupture des rails y est plus fréquente. Un même rail devrait donc, selon les circonstances, pouvoir être employé aux deux espacements différents. Nous allons vérifier les conditions de stabilité du rail nouveau en double T (fig. 22) en prenant 4 et 5 portées pour 4^m5 de longueur, puis 5 et 6 espacements dans une étendue de 5 mètres.

Nommons π_1, π_2, π_3 , les charges qu'un rail peut supporter quand l'un des appuis S_1, S_2, S_3 (fig. 4), vient à manquer ; on déduit des formules (25), (19), (3),

$$\pi_1 = \frac{1}{d} \frac{2\mu}{a_2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{d} \frac{\mu}{0,1924(a_1 + a_2)}, \quad \pi_3 = \frac{1}{d} \frac{27\mu}{4(a_2 + a_3)}.$$

Lorsque deux trains également pesants peuvent agir dans l'intervalle a' de deux portées moyennes, on a

$$\pi = \frac{1}{d} \frac{54\mu a'^2}{8a'^2 + (4a'^2 - 9a^2)^{\frac{1}{2}}};$$

et l'on sait que l'écartement α des trains étant 1^m70 , il faut avoir $\alpha' > 2^m55$ pour qu'il y ait lieu d'appliquer cette formule.

Faisant $\frac{e}{d} = 2651707$ et $\mu = 0,0007$, on obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous.

		RAIL DE 4 ^m 50.		RAIL DE 5 ^m .	
		4 PORTÉES.	5 PORTÉES.	5 PORTÉES.	6 PORTÉES.
Espacements.	α_1	0,92	0,66	0,75	0,60
	α_2	1,33	1,04	1,15	0,92
	α_3		1,10	1,20	0,98
Résistances en kilog.	π_1	4,035	5,625	4,949	6,187
	π_2	4,288	5,675	5,077	6,347
	π_3	4,604	5,855	5,532	6,594

Nous verrons bientôt que l'on peut regarder 4,000 kilog. comme la pression *maxima* exercée sur un rail quand le mouvement est continu ; le rail nouveau, avec cinq portées pour 4^m50, présenterait donc, d'après les résultats du tableau précédent, un excès de force assez notable, et l'on pourrait, sans inconvénient, supprimer un support dans les parties de la voie où la résistance du sol est assez grande. L'espacement de 1,33, que l'on devrait admettre alors dans les portées moyennes, paraît, au premier abord, un peu exagéré ; cependant les conditions de stabilité sont ici beaucoup mieux satisfaites que dans le rail ancien (fig. 16), pour des portées de 0^m90. En effet, si l'on remarque que, toutes choses égales d'ailleurs, la résistance est proportionnelle au rapport $\frac{e}{d}$

divisé par la distance des appuis, on trouve que la résistance du rail nouvellement proposé, pour une portée de 1^m33, est à celle du rail ancien, dont les supports sont écartés de 0^m90, comme,

$$\frac{2651707}{1,53} : \frac{1224062}{0,90},$$

ou comme 3 : 2, fort sensiblement ; or, si l'on observe que le rail (fig. 16) se comporte assez bien dans les portées moyennes, on concevra qu'une augmentation de résistance de moitié offre toutes les garanties désirables de sécurité.

En ce qui concerne la stabilité des supports, il y a lieu de remarquer que la rigidité du rail nouveau, étant double de celle du rail ancien, les charges se répartiront plus uniformément sur les divers points d'appui, et que, par suite de cette circonstance favorable, cinq billes pourront suffire dans un assez grand nombre de cas, sans augmenter sensiblement les sujétions de l'entretien, ce qui permettra de réaliser une économie assez notable dans l'établissement de la fondation de la voie.

Pour confirmer ce qui précède, nous ferons observer qu'aux chemins de fer de Lille et de Valenciennes, vers la frontière de Belgique, les supports sont équidistants et espacés de 1^m425 dans toutes les circonstances, le poids du rail étant de 32 kilogrammes par mètre courant. Si maintenant on tient compte de la plus grande résistance du rail belge, dont le poids est de 36 kilogrammes, ainsi que de la distribution plus judicieuse des supports, en ce qui concerne la répartition des charges sur le sol, on pourra conclure que les deux portées extrêmes de 0^m92, et celles de 1^m33 pour la partie moyenne du rail, correspondant à un espacement moyen de 1^m25, seront admissibles dans presque tous les cas, et qu'il suffira de prendre cinq portées seulement dans les tunnels et les tranchées dont l'assèchement est difficile ou le sol peu résistant.

Les résultats relatifs au rail de 5^m font voir que les conditions de stabilité sont complètement satisfaites avec cinq portées seulement, qui pourraient, par suite, être admises dans presque tous les cas. Dans les circonstances les plus défavorables cependant, on pourrait prendre six espacements.

DE LA CHARGE DES RAILS.

Des efforts auxquels les rails doivent résister. — Dans les chemins de fer desservis par machines locomotives, la plus grande fatigue des rails est due à la flexion verticale produite par le passage des roues motrices. Dans les parties courbes, la force centrifuge donne, en outre, lieu à un effort latéral contre la ligne extérieure; mais l'expérience prouve que les dimensions que le rail doit présenter pour supporter les charges verticales, sont toujours suffisantes pour résister à cet effort horizontal, dont nous pouvons par conséquent faire abstraction.

Lorsque le mouvement de la charge se fait avec continuité, la pression verticale est due à l'action de la gravité et de la force centrifuge qui s'engendre par la flexion du rail; mais, par suite de la discontinuité de la surface de la table, de l'imperfection du mode d'assemblage des abouts, et du mouvement trépidatoire des voitures, la charge donne aussi lieu à des chocs dont il importe beaucoup de ne pas négliger les effets.

Action de la gravité. — Il est assez difficile de déterminer comment le poids d'une locomotive se répartit entre ses différentes roues; toutefois, si l'on remarque que la force de retenue équivaut ordinairement au dixième du poids de la machine, et que le coefficient du frottement de fer contre fer est $\frac{1}{3}$ environ, on est conduit à admettre que les roues motrices exercent une pression égale à la moitié du poids de la locomotive. Dans une machine du poids de 13,000 kilog., chaque roue motrice exercerait, d'après cela, un effort vertical de 3,750 kilog.

Action de la force centrifuge. — Quand la charge que nous venons de déterminer parcourt le rail, son point d'application décrit une courbe ondulée, dans les parties concaves de laquelle il s'engendre une action centrifuge qui doit être ajoutée à celle du poids supposé en repos. Nous allons discuter l'influence de cette nouvelle force dans les diverses portées d'un rail.

1° *Dans les portées moyennes.* — L'équation de la courbe des points d'application du poids π supposé en repos, dans une portée intermédiaire, se déduit de l'équation (7), en y faisant $f=y$ et $a=x$, ce qui donne

$$(39) \quad y = \frac{\pi}{3ia^3}(a-x)^2x^2.$$

Pour obtenir la courbe des points d'application du poids π animé d'une certaine vitesse, il faudrait, dans l'équation précédente, remplacer π par la somme des pressions dues à la gravité et à la force centrifuge. Nommant P cette pression totale, v la vitesse de la charge π , g l'intensité de la gravité, s le rayon de courbure en un point dont les coordonnées sont x et y , observant que l'action de la force centrifuge est toujours fort sensiblement verticale, et que s peut être remplacé

avec assez d'exactitude par $\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, on a

$$P = \pi + \frac{\pi v^2}{g s} = \pi \left\{ 1 + \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right\};$$

expression dans laquelle le terme $\frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2}$, comparé à l'unité, indique l'augmentation de charge due à la force centrifuge en un point donné.

Pour résoudre rigoureusement la question, il faudrait, comme nous venons de le dire, substituer P au lieu de π dans l'équation (39), intégrer ensuite pour obtenir l'équation de

la courbe décrite par la charge π , en tenant compte de la vitesse; on pourrait alors prendre la valeur exacte de $\frac{d^2y}{dx^2}$ en un point assigné par ses deux coordonnées, et en déduire l'augmentation de charge due à la force centrifuge; mais cette solution rigoureuse entraînerait à des calculs inextricables; pour les éviter, remarquons que la courbure du rail étant toujours très-faible, il doit en être de même de la force centrifuge, et que, par suite, cette dernière action modifie peu la courbe (39) obtenue pour une charge supposée en repos; il sera donc suffisamment exact de substituer dans P la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ déduite de cette dernière équation.

La différentiation de l'équation (39) donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{\alpha^2} x^2 (\alpha' - x)^2 (\alpha' - 2x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi}{\alpha^2} 2x(\alpha' - x) \left\{ \alpha'^2 - 5x(\alpha' - x) \right\}.$$

L'expression de $\frac{dy}{dx}$ fait voir que les tangentes à la courbe (fig. 6) sont horizontales aux supports S_1 et S_2 , ainsi qu'en A , milieu de la portée.

La courbe $S_1 A S_2$ présente deux points d'inflexion, I et I' , dont les abscisses sont déterminées par la condition $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, qui donne

$$x = \frac{\alpha'}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right).$$

Nous savons que les abscisses des points B et B' , où la charge produit les fatigues *maxima* des encastremets, sont

$$x = \frac{\alpha'}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right).$$

D'où il résulte que les points B et B' sont situés dans la partie de courbe concave π' , pour laquelle la force centrifuge s'ajoute à l'action de la gravité.

L'action de la force centrifuge qu'il importe le plus de connaître, est celle qui se manifeste quand la charge π est en B , au tiers de la portée $S_1 S_2$; où elle produit la plus grande fatigue de l'encastrement S_2 , toutefois, comme la force centrifuge atteint sa valeur *maxima* au milieu A de l'espacement. il y a lieu de s'assurer si la plus grande fatigue en S_1 continue à être donnée quand la charge est en B .

Faisant $a = \frac{a'}{3}$, puis $x = \frac{a'}{2}$ dans $\frac{d^2y}{dx^2}$, et substituant ensuite les valeurs obtenues dans l'expression de P , on trouve, pour les pressions totales P_2 et P'_2 , qui s'exercent au tiers B et au milieu A de la portée $S_1 S_2$,

$$(40) \quad P_2 = \pi \left\{ 1 + \frac{v^2}{g} \frac{4}{81} \frac{\pi a'}{s} \right\},$$

$$P'_2 = \pi \left\{ 1 + \frac{v^2}{g} \frac{1}{8} \frac{\pi a'}{s} \right\}.$$

2° *Dans les portées extrêmes.* — Avant de donner les résultats numériques de ces formules et d'en faire la comparaison, nous allons continuer la discussion dans les portées extrêmes.

On obtient l'équation de la courbe (fig. 7) des points d'application de la charge dans une portée extrême, en faisant, dans la formule (21), $f=y$ et $a=x$, ce qui fournit

$$y = \frac{\pi}{12a^3} x^2 (a-x)^2 (4a-x);$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{24a^3} x^2 (a-x) \left\{ (a-x)(2a-x) - a \right\},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi}{2ia'^2} x \left\{ 2a'^2(2a' - 9x) + 3x^2(4a' - x) \right\}.$$

L'expression même de $\frac{dy}{dx}$ fait voir que les tangentes en S_1 et S_2 sont horizontales, quoiqu'en ce dernier point le rail soit simplement appuyé; le passage d'un rail à un autre se fait donc avec continuité, quand il n'y a pas dépression dans le support d'about. La tangente est aussi horizontale au point A , dont l'abscisse est $x = a'(2 - \sqrt{2})$.

La courbe $S_1 A S_2$ présente encore deux points d'inflexion en I et I' ; leurs abscisses, déterminées par la condition $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, sont approximativement $x = 0,34a'$ pour le point I , et $x = 0,83a'$ pour I' .

Dans la détermination des fatigues *maxima* des portées extrêmes, nous avons trouvé que la plus grande fatigue de l'encastrement S_1 était produite quand la charge était au point B , qui a pour abscisse $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a' = 0,423a'$, et que celle du point d'application avait lieu quand π était en c , dont l'abscisse $x = \frac{5 - \sqrt{3}}{3} a' = 0,634a'$. En comparant ces valeurs aux abscisses des points d'inflexion, on en conclut encore que les actions centrifuges s'ajoutent à la gravité, quand les charges produisent les fatigues *maxima*.

Au point B , pour $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a'$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi}{9} (5 - 3\sqrt{3}) a' = -\frac{\pi}{9} 0,17469 a';$$

en C , pour $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} a'$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi}{8} (33 - 20\sqrt{3}) a' = -\frac{\pi}{8} 0,20512 a'.$$

Substituant ces valeurs, prises positivement, dans l'expression générale de P , on a, pour les pressions totales P_1 et P'_1 , qui s'exercent en B et en C ,

$$(41) \quad P_1 = \pi \left\{ 1 + \frac{v^2}{g} \frac{\pi}{4} 0,17469a' \right\},$$

$$P'_1 = \pi \left\{ 1 + \frac{v^2}{g} \frac{\pi}{4} 0,20512a' \right\}.$$

La force centrifuge *maxima* se produit en A et C , dans une position très-rapprochée de ce dernier point, et nous pouvons regarder la valeur de P'_1 comme la pression *maxima* qui s'exerce dans toute l'étendue de la portée $S_1 S_1$.

Pour connaître les circonstances relatives à la force centrifuge quand les billes S_2 ou S_1 cèdent (fig. 4), il suffit de faire a' égal à la somme des deux portées voisines du support qui manque.

Il nous reste à voir ce qui se passe quand la bille d'about permet la flexion complète des deux portées qui viennent s'y appuyer.

Lorsque la bille extrême manque complètement de résistance, on obtient l'équation de la courbe $S_1 S_1$, décrite par le point d'application de la charge (fig. 8), en faisant $f=y$ et $a=x$ dans la formule (26), qui donne ainsi

$$y = \frac{\pi}{24a'^3} x^3 \left\{ 8a'x - x(3a' - x^2) \right\};$$

d'où
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{4a'^3} x^2 \left\{ 4a'^2 - x(3a' - x)(2a' - x) \right\};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi}{4a'^3} x \left\{ 2a'^2(4a' - 9x) + 5x^2(4a' - x) \right\}.$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant toujours positive dans l'étendue de la courbe $S_1 S_1$, il s'ensuit que cette dernière tourne constamment sa convexité vers l'axe des x , et que la force centrifuge est dirigée en sens inverse de l'action de la gravité.

Quand la charge passe de la courbe $S_1 S_1$ sur sa symétrique SS_1 , elle décrit en S_1 un jarret, dans lequel il se produit un choc qui est toujours assez faible, même quand la vitesse est grande.

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ au point S_1 est exprimée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{6} \frac{\alpha'^2}{2}.$$

Remarquant que la flèche $S S_1$ a pour expression $\varphi = \frac{\pi}{6} \frac{\alpha'^3}{6}$, on peut encore écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi}{\frac{1}{3} \alpha'};$$

ce qui fait voir que la tangente $S_1 T$ en S_1 , vient couper l'axe des x au tiers de la portée à partir de l'about. Quand la charge décrit le dernier élément de courbe en S_1 , elle se meut en réalité comme si elle descendait du plan incliné TS_1 pour remonter brusquement sur un autre plan $T'S_1$, de même inclinaison que le précédent, et il résulte de là un choc, dont nous allons apprécier l'intensité.

Appelons v la vitesse de la charge, v' sa composante normale à $S_1 T$. Remarquant que l'angle ω $S_1 C$ des deux tangentes $S_1 T$ et $S_1 T'$, est toujours très-faible et double de celui $S_1 T S = \omega$, on a

$$v' = v \operatorname{tang} 2\omega,$$

ou, fort sensiblement,

$$v' = 2v \operatorname{tang} \omega;$$

et, remplaçant $\operatorname{tang} \omega$ par $\frac{\pi}{6} \frac{\alpha'^2}{2}$,

$$(42) \quad v' = \frac{\pi}{3} \alpha'^2 v.$$

Dans l'application de cette formule, il faut avoir égard à la diminution de pression due à la force centrifuge qui se

manifeste quand la charge arrive en S_2 ; en ce point, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5}{4} \pi a'$, et la pression π , qui produit le jarret quand la charge est en repos, doit être remplacée par

$$(43) \quad P_1 = \pi \left(1 - \frac{v^2 5 \pi a'}{g 4} \right).$$

lorsque la même charge est animée de la vitesse v .

Applications numériques. — Pour appliquer les formules précédentes au nouveau rail en double T (fig. 22), faisons $\epsilon = 159102$; prenons $n = 3750$ kilog., action due à la gravité; $v = 12^m$ et $g = 9^m 8$: les formules (40) et (41) donnent, pour des espacements de $0^m 90$,

$$P_2 = \pi \cdot 1,015 \qquad P_3 = \pi \cdot 1,054$$

$$P'_2 = \pi \cdot 1,032 \qquad P'_3 = \pi \cdot 1,064$$

Substituant P_2 et P'_2 respectivement dans les formules (5) et (6), P_3 et P'_3 dans (19) et (20), on trouve qu'en tenant compte de la force centrifuge, les fatigues *maxima* à l'encastrement et au point d'application, sont entre elles comme 32,48 : 28,05 pour les parties moyennes, et comme 0,2028 : 0,1859 pour les parties extrêmes; c'est à dire que les fatigues *maxima* des encastresments sont encore plus fortes que celles des points d'application de la charge, quoique dans celle-ci la force centrifuge S soit plus grande que dans les premières.

Pour obtenir les pressions qui se manifestent quand les billes cèdent, il suffit de faire, dans les formules (40) et (41), $a' = 1^m 80$ pour les espacements égaux de $0^m 90$, et de poser $a' = 2^m 14$ dans la formule (40) et $a' = 1^m 70$ dans (41), pour les portées inégales $a_1 = 0,66$, $a_2 = 1,04$, $a_3 = 1,10$. C'est ainsi que l'on a,

pour les espacements
égaux,

$$P_2 = \pi 1,031$$

$$P'_2 = \pi 1,078$$

$$P_3 = \pi 1,109$$

$$P'_3 = \pi 1,128$$

pour les espacements
inégaux,

$$P_2 = \pi 1,037$$

$$P'_2 = \pi 1,093$$

$$P_3 = \pi 1,103$$

$$P'_3 = \pi 1,121$$

Les valeurs P_1 et P_2 sont les pressions qu'il faut prendre pour la détermination des conditions de stabilité. Quel que soit le mode d'espacement que l'on considère, les résultats précédents font voir que, dans la somme de deux portées extrêmes, l'augmentation de charge due à la force centrifuge peut aller à $\frac{\pi}{10}$. Le poids 3,750 kilog étant augmenté de $\frac{1}{10}$ fournit 4,000 kilog. environ, que l'on peut regarder comme la limite supérieure de charge qu'un rail doit supporter avec les locomotives actuellement usitées, et en admettant que le mouvement soit continu.

Les valeurs P'_1 et P'_2 donnent les pressions qui s'exercent sur le rail, au-dessus des supports qui cèdent; elles doivent servir pour la détermination des flèches *maxima* et de la dépression des supports.

Accord des résultats précédents avec les observations de M. Barlow.—Quand les supports sont fixes, la force centrifuge ne s'élève guère qu'à 6% de la charge π des roues motrices; elle serait plus faible encore pour les waggons dont les roues produisent une flexion moins prononcée. Ce résultat se trouve confirmé par les expériences faites par l'ingénieur Barlow, sur la dépression des rails, cet auteur étant parvenu à la conclusion que la charge d'un rail est sensiblement indépendante de la vitesse, lorsque le mouvement se fait sans soubresaut. Les mêmes expériences prouvent que, par suite des imperfections d'exécution du rail, du mode d'assemblage des abouts, et du mouvement trépidatoire des voitures, la flexion des rails peut être notablement accrue. Dans le chapitre précédent, nous avons tenu compte de ces dernières circonstances, en déterminant la limite de fatigue qu'il convient de ne pas dépasser pour les rails.

La force centrifuge est d'une considération toute secondaire, en ce qui concerne l'espacement des supports; il est toutefois à remarquer que son action étant plus intense dans les portées extrêmes, elle tendrait plutôt à faire diminuer ces dernières.

Force centrifuge dans le rail ancien. — La valeur générale de la pression P fait voir que l'action de la force centrifuge est inversement proportionnelle au moment d'élasticité ϵ . Toutes choses égales d'ailleurs, on obtiendra les résultats relatifs au rail ancien (fig. 17) en modifiant ceux que nous venons de donner pour le rail nouveau, dans le rapport de 459 à 88; c'est-à-dire que la force centrifuge est double à peu près dans le rail précédemment usité.

CHOCs PRODUITS PAR LES JOINTS.

Les chocs qui se produisent aux abouts des rails sont dus aux différences de niveau qui existent souvent entre les tables, et à l'ouverture des joints; nous allons en présenter la discussion, afin de compléter ce que nous venons de dire sur la charge des rails, et d'expliquer la rupture que l'on observe fréquemment à 0^m25 des extrémités, environ.

Choc produit par une différence dans le niveau des abouts.

1° *A la descente.* — Soient A et B (fig. 9) deux abouts offrant une différence de niveau $AB=y$. Quand la charge vient du rail supérieur et se meut avec lenteur, le centre de la roue, après avoir parcouru une horizontale HO , terminée à la verticale passant par B , décrit un arc de cercle dont le centre est en B , et continue ensuite à parcourir une horizontale CH' , après avoir pris appui en D . Lorsque la vitesse est grande, le centre de la roue lancée du point O décrit un arc de parabole OF' , et vient ainsi produire un choc à une distance assez grande de l'about A .

Nommant v la vitesse du centre de la roue, g l'intensité de la gravité, et x et y les coordonnées horizontale et verticale d'un point quelconque de la parabole, l'origine étant en O , on a, pour l'équation de cette courbe,

$$\frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2y}{g}}.$$

Désignant particulièrement par x et y les coordonnées du point F' , on a, pour amplitude horizontale de l'arc OF' ,

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g}},$$

et pour la vitesse verticale O' qui produit le choc,

$$v' = \sqrt{2gy}.$$

Pour $v=12^m$ et $y=0^m004$	0^m002	0^m003
on a	$x=0^m17$	$0^m24 \quad \cdot \quad 0^m30$
	$v'=0^m14$	$0^m19 \quad 0^m24.$

La valeur de v' fait voir que la perte de force vive due au choc, est proportionnelle à la hauteur de chute y .

2° *A la montée.* — Lorsque la charge se meut du rail le plus bas vers le plus élevé, et que la vitesse est petite, le centre C de la roue décrit l'arc de cercle CD , dont le centre est en B ; mais, quand la vitesse est grande, il se produit, dans le sens du rayon CB , un choc assez considérable, et l'axe de la roue prend en C une vitesse tangentielle à l'arc CO , en vertu de laquelle elle peut décrire un arc parabolique tel que CF .

Nommons r le rayon de la roue, y la différence de niveau AB , $v = C\alpha$ la vitesse horizontale, que nous supposons se conserver après le choc, $v' = C\beta$ la composante de v dans la direction du rayon CB , v'' la composante verticale de la vitesse tangentielle en C ; on a, d'après la figure,

$$v' = v \frac{EB}{CB} = v \frac{\sqrt{2-yr-y^2}}{r},$$

$$v'' = v \frac{CE \cdot EB}{CB^2} = v \frac{(r-y)\sqrt{2ry-y^2}}{r^2}.$$

Observant que y est toujours très-petit par rapport à r , on a fort sensiblement,

$$v = v'' = v \sqrt{\frac{2y}{r}}.$$

Nommant h la hauteur de chute que produit la vitesse v' , il vient

$$h = \frac{v'^2}{2g}$$

Prenant	$v = 12^m$,	$g = 9,8$,	$v = 0,45$,
et	$y = 0,004$,	$= 0,002$,	$= 0,003$,
on a	$v' = 0,80$,	$= 1,13$,	$= 1,38$,
	$h = 0,032$,	$= 0,065$,	$= 0,097$.

D'après l'expression de v' , on conclut que la perte de force vive est proportionnelle au carré de la vitesse des voitures, à la différence de niveau des rails, et en raison inverse du rayon de la roue.

Pour que les chocs soient égaux à la montée et à la descente, il faut que l'on ait

$$v \sqrt{\frac{2y}{r}} = \sqrt{2gy}, \text{ d'où } v = \sqrt{gr}.$$

Pour $y = 9^m8$ et $r = 0^m45$, on a $v = 2^m10$; or, comme la vitesse est toujours plus grande que 2^m10 , il s'en suit que les chocs sont toujours plus pernicious à la montée qu'à la descente des obstacles.

Choc produit par l'ouverture du joint. — Lorsque le rail est coupé carrément à ses extrémités, il se produit encore un choc lors du passage des roues au-dessus du joint; mais la perte de force vive due à cette cause est tout à fait insignifiante.

Soit AB (fig. 10) l'ouverture du joint; le centre de la roue, animé d'une certaine vitesse, parcourt d'abord l'horizontale HC jusqu'en C , sur la verticale passant par A , puis décrit de là l'arc de parabole CC et produit un choc dans le sens du rayon CB , qui aboutit à l'arête B .

Nommons δ l'ouverture du joint AB , r le rayon de la roue.

x et y les coordonnées horizontale et verticale du point C , par rapport à C' , v la vitesse horizontale, v' la composante dans le sens du rayon CB ; en opérant comme dans le cas précédent, on trouve

$$v' = v \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r},$$

ou fort sensiblement,

$$v' = v \sqrt{\frac{2y}{r}}.$$

Observant que x et y sont deux coordonnées de la parabole CC' , on a

$$\frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2y}{g}};$$

d'où

$$y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2}.$$

On a, en outre, entre les quantités δ et y la relation

$$\delta = x + \sqrt{2ry - y^2},$$

ou assez exactement,

$$\delta = x + \sqrt{2ry}.$$

Des équations en x et y on déduit,

$$\frac{x}{v} = \frac{\delta}{v + \sqrt{gr}},$$

$$y = \frac{g}{2} \frac{\delta^2}{(v + \sqrt{gr})^2}.$$

Substituant cette valeur dans v' ,

$$v' = \sqrt{\frac{g}{r}} \frac{v}{(v + \sqrt{gr})} \delta.$$

Pour $r = 0^m 45$ et $v = 12^m$, on a

$$v' = 4^m 26 \delta.$$

Pour une ouverture de joint $\delta=0^m005$, on a seulement $v'=0^m0213$, et le choc dû à cette vitesse est égal à celui produit par une hauteur de chute de 0^m00002 , ou par la montée d'un obstacle de $0^m0000006$ de surélévation.

Lorsque v augmente, v' croît aussi, le facteur $\frac{v}{v+\sqrt{gr}}$ tend à devenir égal à l'unité, et l'on a, pour limite de v' ,

$$v' = \sqrt{\frac{g}{r} \delta},$$

$$v' = 4,66 \delta.$$

En faisant même $\delta=0,01$, on a seulement $v'=0^m046$, ce qui prouve que l'on peut ne tenir aucun compte du choc produit par l'ouverture du joint.

Choc produit par la dépression de la bille d'about.—Pour terminer la discussion des effets pernicieux du joint, nous allons donner l'application numérique de la formule (42), qui fournit la vitesse qui produit le choc dans le jarret qui se forme quand la bille d'about cède.

Prenant $\pi=3,750$ kilog., $a'=0^m90$, $v=12^m$ et $\epsilon=159102$ (rail nouveau), on a, pour la pression qui s'exerce en S_1 (fig. 8),

$$P_1 = 3,750(1 - 0,3896) = 2289 \text{ kilog.}$$

La diminution de charge $0,3896$, prise dans la courbe S, S_1 , produite par le poids $3,750$ kilog., est ici beaucoup trop forte, à cause de l'action intense de la force centrifuge; on se rapprochera de la vérité en prenant la correction relative à la charge $2,289$ kilogrammes, abstraction faite de l'action centrifuge; on a alors

$$P_1 = 3,750(1 - 0,2378) = 2,858 \text{ kilog.}$$

La diminution $0,2378$ est maintenant trop faible, et la pression 2858 kilogrammes, trop forte. L'action de la force centrifuge, prise dans la courbe produite par cette dernière charge, sera donc trop grande; elle donne

$$P_1 = 3,750(1 - 0,297) = 2636 \text{ kilogrammes.}$$

Cette valeur de P_1 est plus tôt trop petite ; en la substituant au lieu de π dans la formule (42), on trouve, pour la vitesse que produit le choc, $v = 0,67$: elle est due à une hauteur de chute 0^m00142 .

Faisant les mêmes calculs pour la portée $a' = a_1 = 0,66$ des espacements inégaux, on obtient $v' = 0,093$, vitesse due à la hauteur 0^m00046 seulement.

Les résultats précédents nous font voir que le choc qui peut se produire par la dépression de la bille d'about, est, dans tous les cas, assez faible, et qu'il se trouve notablement diminué dans les portées inégales.

Rupture des rails dans le voisinage des abouts. — Nous avons vu, en traitant de la flexion des rails, que les fatigues *maxima* ont toujours lieu aux encastremets, et que c'est aux coussinets intermédiaires que les ruptures devraient être le plus fréquentes ; mais les choses se passent rarement ainsi en pratique, et l'on observe que les rails cèdent généralement de 0^m20 à 0^m30 de l'about. Pour expliquer ce fait, il suffit de rappeler que dans une portée extrême, la fatigue *maxima* se produit au point d'application, quand la charge agit dans les 0^m4142 de l'espacement à partir du joint, ou dans l'intervalle 0^m37 , quand les supports sont écartés de 0^m90 ; or, nous avons trouvé qu'en passant d'un rail à un autre moins élevé de 0^m003 , une roue lancée avec une vitesse de 12^m , devait même tomber en deçà de $0,30$; elle donne donc lieu, au point où elle prend appui, à une fatigue plus grande que celle de l'encastrement, et c'est au point où se produit le choc que la rupture doit se manifester, si l'action est assez intense.

Espacement des supports. — En traitant la question des espacements, nous avons toujours admis que le mouvement des charges se faisait avec continuité, et nous avons été conduits, par cette seule considération, à diminuer notablement les

portées extrêmes, par rapport à celles intermédiaires. Si l'on tient compte maintenant des chocs plus nombreux auxquels les joints exposent les billes d'about et les portées qui en sont voisines, on concevra qu'il convient tout au moins de conserver, sans augmentation, les résultats trouvés pour les espacements des extrémités.

Assemblage des abouts. — Dans l'assemblage à trait de Jupiter, on a eu particulièrement en vue de faire disparaître le choc dû à l'ouverture du joint ; mais ce dernier inconvénient, ainsi que nous venons de le voir, est extrêmement secondaire. La condition la plus essentielle à remplir, dans un assemblage d'abouts, est la fixité dans le sens vertical, et le trait de Jupiter ne la réalise guère mieux que les abouts carrés.

Les rails coupés carrément présentent toutefois quelques inconvénients pour la stabilité du coussinet extrême, qui tend à se déverser et à fatiguer ses chevilles, en tournant autour des arêtes de sa base, normales à la voie, quand un about tend à se lever et l'autre à s'abaisser, par suite des actions inverses des charges voisines. Pour permettre au coussinet d'about de mieux résister aux chocs qu'il doit recevoir fréquemment par le passage du joint, on lui donne ordinairement trois centimètres de plus en largeur qu'à ceux intermédiaires, et cette précaution est aussi efficace pour éviter la tendance au déversement dont nous venons de parler.

Les onglets du trait de Jupiter, ou de l'assemblage à mifer, se rabattent aussi plus vite que des abouts carrés, par suite de l'usure, et les tables s'affleurent mieux, au bout de quelque temps de service ; on pourrait même, pour éviter les chocs, incliner, en dessous de la surface générale du champignon, les extrémités de ces assemblages.

Élasticité de la fondation de la voie. — Il est essentiel de remarquer que, dans l'appréciation du choc dû à la montée d'une roue sur un obstacle, nous avons supposé le système

de fondation d'une rigidité absolue, et la matière des jantes impénétrable; or, ces hypothèses s'écartent beaucoup de la vérité, et la perte de force vive est notablement moindre que celle à laquelle nous avons été conduit. Les billes présentent une grande élasticité, et l'obstacle en s'abaissant disparaît en partie; la jante se trouve, en outre, plus ou moins pénétrée par l'arête du rail le plus élevé, et le choc se trouve, par ce double motif, considérablement atténué. Les résultats que nous avons obtenus démontrent, dans tous les cas, les inconvénients qu'il y aurait à établir le système de fondation d'une manière trop rigide, et la nécessité de l'asseoir dans un encoffrement assez épais dans les tranchées en roc.

Maintenant nos hypothèses dans toute leur rigueur, on trouve qu'en montant sur un obstacle, une roue est susceptible de décrire un arc parabolique d'une très-grande étendue; mais, outre les motifs que nous venons de faire valoir pour l'atténuation du choc, il y a lieu de remarquer ici que la charge posée sur ressorts n'en recevant pas l'action brusque, le relèvement qui tend à se manifester dans la roue, n'en produit qu'un assez faible dans la voiture. Les résultats obtenus pour un système rigide sont trop écartés des faits observés en pratique, pour être reproduits ici (1). Ils éta-

(1) Prenant l'origine des coordonnées en C (fig. 9), les x étant horizontaux et les y verticaux, on a, pour l'équation de l'axe de parabole décrit par le centre x de la roue,

$$\frac{v}{x} - \frac{v'}{y} + \sqrt{\frac{v'^2}{g^2} - \frac{2y}{g}}$$

Considérant l'ordonnée y comme la différence de niveau des rails, la double valeur de x nous donnera les abscisses des deux points G et F , où le centre de la roue vient rencontrer l'horizontale OH , qu'il continue à parcourir après sa chute.

Observant que l'on a

$$v' = v \sqrt{\frac{2y}{r}},$$

$$EB = \sqrt{2ry};$$

prenant $v = 12^m$, $g = 9.8$, $r = 0^m 43$, on obtient pour,

$y = 0^m 001$	$= 0^m 002$	$= 0^m 003$.
$OF = 1^m 91$	$= 2^m 70$	$= 3^m 31$.

blissent d'ailleurs les avantages du mode de suspension des voitures sur ressorts, et viennent confirmer ce que nous avons déjà dit sur la nécessité de laisser à la fondation une certaine élasticité.

CONCLUSIONS.

Résumons rapidement les diverses conclusions auxquelles nous avons été conduits en exposant la théorie de la résistance des rails saillants.

Deux dispositions longitudinales ont été principalement usitées, pour les rails en fer malléable de plusieurs portées, savoir : la forme subondulée, et celle des rails parallèles.

Les rails subondulés présentent une disposition tout à fait inverse de celle qui permettrait de réaliser une égale résistance; les ondulations entraînent, d'ailleurs, à de nombreux inconvénients pratiques, en ce qui concerne la fabrication et la pose.

Les rails parallèles, au contraire, permettent une fabrication simple et une pose facile, ils satisfont fort sensiblement à la condition d'égale résistance, et l'on ne pourrait modifier la répartition de la matière dans le sens longitudinal sans retomber dans les difficultés inhérentes aux formes ondulées.

Considérant la forme transversale des rails, sous le rapport de la distribution de la matière, relativement à l'axe d'équilibre, il y a lieu de distinguer les deux types en simple T et en T double.

La détermination de la forme transversale de plus grande résistance revient à trouver la section d'une aire constante ω , pour laquelle le rapport $\frac{e}{d}$ atteint sa valeur *maxima*, les dimensions de cette section tombant toutefois dans des limites admissibles en pratique. De l'application de cette méthode

on conclut que la résistance d'un rail en double T (fig. 22), est à celle d'un rail en simple T , de même hauteur et de même poids (fig. 20), comme 3 : 2 environ. Ce rapport est encore de 26 à 19, lorsqu'on compare la section (fig. 22) à celle (fig. 19), qui présente la plus grande hauteur admise en pratique. Ces résultats établissent suffisamment les avantages des rails en double T sur ceux en T simple.

La section du rail à double champignon et du poids de 36 kilogrammes, qui paraît la plus convenable à tous égards, est celle de la figure 22 ; on ne pourrait guère la rendre plus résistante sans qu'il en résultât des inconvénients, par suite de la diminution que l'on devrait faire subir, soit en hauteur à la table, soit en épaisseur à la nervure.

Toutefois il importe de remarquer que la symétrie des tables suppose la possibilité du retournement du rail ; si cette prévision ne pouvait se réaliser, il serait plus avantageux de disposer chaque table de la manière la plus convenable à son objet particulier. Le champignon inférieur pourrait alors être rendu d'une fixation plus facile ; il aurait d'ailleurs des dimensions moins grandes que celui destiné au roulage.

L'équidistance des supports présente de nombreux inconvénients ; la position des appuis n'étant plus assignée d'avance avec les rails prismatiques, on pourra déterminer les espacements de manière à réaliser une même résistance dans les diverses portées du rail, ou à rendre égales les actions que chaque support exerce sur le sol, ou enfin à restreindre les dépressions entre les limites les plus étroites. L'expression analytique de ces conditions nous a amené aux résultats suivants :

Si les supports pouvaient être considérés comme rigoureusement fixes, les diverses portées présenteraient la même résistance en faisant les espacements moyens et ceux d'about dans le rapport de 1 à 0,77 ; en les prenant comme les nombres 1 et 0,84, les dépressions seraient égales.

Mais le cas des supports fixes ne se réalise jamais ; pour se placer dans les circonstances de la pratique , il faut supposer que chaque appui cède complètement. Le rail ayant 3 espacements , la résistance sera alors la même dans les diverses portées combinées 2 à 2, en prenant celles-ci dans le rapport des quantités

$$a_2=1, \quad a_3=0,90, \quad a_4=0,563.$$

Pour que les pressions exercées sur le sol , ainsi que les flexions, soient égales , il faut prendre pour les espacements,

$$a_2=1, \quad a_3=0,978, \quad a_4=0,623.$$

On peut donc satisfaire convenablement à toutes ces exigences, en prenant les portées dans le rapport des quantités

$$a_2=1, \quad a_3=0,94, \quad a_4=0,60.$$

L'appréciation des hypothèses faites pour l'établissement des formules que nous ont données les résultats précédents, prouve que ces derniers chiffres peuvent être conservés sans modifications. Un rail de 4^m30 et de 3 portées aurait, d'après cela, pour espacements

$$a_2=1^m10, \quad a_3=1^m04, \quad a_4=0^m66,$$

et nous avons vu qu'il présenterait alors fort sensiblement les mêmes circonstances dans toute son étendue, en ce qui concerne la fatigue , les flexions des diverses portées , ainsi que les pressions reportées sur le sol par les supports.

Les conditions de stabilité des rails se vérifient au moyen des relations (5), (19) et (23), les deux premières étant appliquées au cas des portées doubles ; elles doivent fournir pour

une résistance de 4,000 kilogrammes au moins, la charge des rails pouvant atteindre ce dernier poids. L'application de ces formules nécessite la connaissance bien précise de la valeur qu'il convient d'attribuer au coefficient μ pour ne pas dépasser les limites de l'élasticité. En combinant les expériences faites par M. l'ingénieur Barlow, on est conduit à prendre

$$\mu = 0,0007.$$

D'après ce qui précède, le rail belge nouveau modèle avec cinq portées,

$$a_1 = 1^m10, \quad a_2 = 1^m04, \quad a_3 = 0^m66,$$

pour 4^m30 de longueur offre un excès de résistance très-notable. Les conditions de stabilité sont même amplement satisfaites avec 4 portées,

$$a_1 = 1^m33, \quad a_2 = 0,92,$$

la résistance dans ce cas se trouvant être encore de moitié plus forte que celle du rail actuellement en usage en Belgique, l'espacement moyen des supports devenant alors de 1^m42, comme dans plusieurs chemins de fer étrangers.

On peut donc généralement admettre, dans la pratique, 4 portées seulement, celles d'about étant de 0^m95 et celles du milieu de 1^m30; dans quelques circonstances difficiles seulement, on conserverait cinq espacements: ceux d'about seraient de 0^m65, les suivants de 1^m05, et celui du milieu de 1^m40.

La plus grande charge des rails est due au passage des locomotives; elle résulte de la pression exercée par les roues motrices, de la force centrifuge qu'elle développe par suite de la flexion des rails, et enfin des chocs produits par l'imperfection de la surface des tables et les trépidations de la machine.

La pression provenant de l'action de la gravité peut être évaluée à 3,750 kilogrammes environ, le poids total de la locomotive étant de 15,000 kilogrammes. L'action de la force centrifuge est variable dans les diverses portées ; pour le nouveau rail belge, nous avons trouvé qu'elle pourrait donner lieu à une pression de 375 kilogrammes environ, lorsque la charge produit la fatigue *maxima* en agissant dans l'intervalle des deux dernières portées ($\alpha_1 = 1^m04$ et $\alpha_2 = 0^m66$). Ayant d'ailleurs tenu compte, dans la détermination du coefficient μ , de la fatigue due aux chocs et aux trépidations des véhicules, on conclut que la charge des rails peut être considérée comme étant de 4,000 kilogrammes environ, avec les locomotives actuellement en usage.

Les chocs qui se produisent aux abouts des rails sont dus à la différence de niveau qui peut exister entre les tables, ainsi qu'à l'ouverture des joints. En passant d'un rail à un autre moins élevé, la roue peut tomber à une assez grande distance de l'about ; on doit attribuer au choc produit par cette chute, les nombreuses ruptures qu'on observe dans les rails à proximité des joints.

Lorsque la roue, animée d'une grande vitesse, monte sur le rail le plus élevé, il se manifeste un choc très-intense, et le centre de cette roue décrit un axe parabolique, qui peut être d'une assez grande étendue. Les résultats auxquels on est conduit par l'appréciation de ce choc, quoique considérablement exagérés, à raison des hypothèses faites sur l'impénétrabilité de la matière des jantes et de la rigidité de la voie, prouvent, dans tous les cas, le besoin d'une certaine élasticité dans le système de fondation de la route et les avantages du mode de suspension des voitures sur ressorts. Par le passage des roues au-dessus des joints d'une ouverture même exagérée, le choc qui se produit est toujours extrêmement faible, et les abouts coupés carrément ne présentent aucun inconvénient à cet égard.

La condition essentielle à remplir, dans un assemblage d'abouts, est l'affleurement des tables. Les assemblages biais, ou à trait de Jupiter, ne la réalisent guère mieux que ceux coupés carrément; les abouts droits peuvent donc être admis en pratique.