CONSTRUCTIONS.

NOTICE

SUR UN

VIADUC A TRAVÉES EN FER,

CONSTRUIT A ARQUENNES,

SOUS LE CHEMIN DE FER DE MANAGE A WAVRE,

SUIVIE D'UNE

NOTE

CONCERNANT LA DÉTERMINATION DES DIVERSES PARTIES DES POUTRES EN TREILLIS ADOPTÉES POUR CET OUVRAGE;

PAR **M. CH. ANDRIES**,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

I.

Le chemin de fer de Manage à Wavre franchit la vallée de la Samme, dans la commune d'Arquennes, par un viaduc à sept travées en tôle, de 24 mètres d'ouverture, portées par des piles et des culées de 9 à 15 mètres de hauteur. La nécessité de fournir passage à la Samme et au canal de Charleroy à Bruxelles, et d'autre part les avantages qui résultaient de la suppression d'un remblai important, ont décidé les ingénieurs de la société du chemin de fer de Manage à Wavre à construire l'ouvrage dont il s'agit. Ses dimensions le placent parmi les travaux d'art les plus considérables exécutés en Belgique; les poutres des travées présentent d'ailleurs certaines dispositions peu connues jusqu'ici et qui méritent de fixer l'attention des constructeurs.

Nous devons à l'obligeance de M. Legallais, ingénieur de la société, la communication des dessins fournis par les planches I à V jointes à cette notice; ils font connaître dans son ensemble et dans ses détails le viaduc d'Arquennes.

Les piles et les culées, planches I et V, sont construites en pierre calcaire (petit granit des carrières d'Arquennes), offrant des parements simplement dégrossis à la pointe; leurs faces parallèles à l'axe du canal de Charleroy à Bruxelles, font un angle de 72° avec l'axe du chemin de fer; des supports en fonte, de 2m,32 de hauteur, surmontent les maçonneries et comprennent les poutres, de hauteur égale, qui composent les travées.

Chacune de celles-ci est formée de quatre poutres destinées à porter deux voies entièrement indépendantes. Les deux poutres qui répondent à chaque voie, planches I et III, sont espacées de 3m,46 et placées à égale distance de l'axe de la voie; elles reçoivent, par l'intermédiaire de semelles en bois, un plancher de madriers jointifs sur lequel est jeté un ballast en sable, maintenu par deux cours de madriers placés de champ et qui servent de base aux parapets du viaduc. La voie comprend des rails saillants ordinaires, des coussinets, des longrines avec pièces d'écartement et, en outre, des billes placées sous les longrines à des intervalles de 2m,50.

Les poutres se composent de deux cours de lisses horizontales réunies par une nervure en treillis, d'après le système des ponts en treillis américains. Les lisses supérieures, pl. II, sont formées d'une plate-bande, de deux joues verticales entre lesquelles viennent se réunir les barres du treillis, et de deux fers d'angle dont la face verticale a des hauteurs d'autant moindres que l'on s'approche davantage des appuis. Les lisses inférieures, pl. II, sont formées simplement de joues verticales comprenant les pièces du treillis; ces joues sont doubles dans la partie moyenne de la pièce et simples près des appuis. Les barres du treillis, pl. I, d'un équarrissage uniforme, sont d'autant plus rapprochées que l'on considère des parties plus voisines des supports, en sorte que la résistance propre du treillis va en croissant depuis le milieu de la poutre jusqu'à ses extrémités. Toutes les parties de la poutre sont réunies à rivets, et les bandes qui composent les lisses sont garnies de plaques formant couvre-joints; les joues verticales des lisses et les barres du treillis sont assemblées à clavettes et à rivets aux supports en fonte qui surmontent les piles et les culées, ainsi que le montrent les planches I et IV.

Enfin, les deux longerons d'une voie sont entretoisés par trois croisillons en fonte, planches I et III, placés normalement à l'axe de la voie; les lisses supérieures et inférieures sont saisies par les extrémités de ces croisillons et par celles de poteaux extérieurs en fonte, puis serrés à l'aide de tirants horizontaux en fer.

Avant d'être livrées à la circulation, les travées du viaduc d'Arquennes, entièrement achevées pour une voie, ont été soumises aux épreuves suivantes :

Une charge supplémentaire de $75{,}000^k$, ou de $3{,}125^k$ $\left(\frac{75{,}000^k}{24}\right)$ par mètre courant, équivalente à un train de locomotives du poids le plus élevé relativement à leur longueur, a été laissé pendant une heure sur la voie de chaque travée. Avec la charge permanente d'environ $60{,}000^k$, qui répond au poids de toutes les parties qui composent une demi-travée, chaque poutre supportait donc pendant l'épreuve un poids de $\frac{135{,}000_k}{2} = 67{,}500^k$, ou de $2{,}812^k{,}5$ par mètre courant. Des nivellements ont constaté, sauf de petites différences dues à des erreurs inévitables, que les poutres ont repris exactement, après l'épreuve, leur forme première; le poids considérable des travées, en maintenant toutes les parties des fermes dans un état permanent de tension, a rendu nuls des tassements ultérieurs dans les assemblages, et de cette manière l'épreuve n'a point donné lieu à une dépression qui subsistât après l'essai, comme cela a lieu en général pour des fermes en fer ou en charpente qui ne sont point soumises à une charge permanente considérable. Quant à la valeur absolue des flèches observées pendant l'essai, le nivellement a constaté des résultats trop divergents pour qu'il nous soit possible d'en déduire aucune conséquence utile; les extrémités des poutres n'étant point libres, l'on comprend qu'une faible différence dans la longueur des poutres peut, lors de la pose, donner un certain relèvement aux fermes en leur milieu, et de là peuvent naître des différences très-sensibles dans les flèches, sous l'action d'une même charge. Ajoutons toutefois que les plus grandes dépressions observées par le nivellement n'ont pas dépassé $0^m,015$, valeur qui, eu égard à la portée de 24 mètres, peut encore être considérée comme très-faible.

Une deuxième épreuve a eu lieu à charge mobile : un train de trois machines locomotives (deux machines-tender de $27,000^k$ et une machine ordinaire de $40,000^k$) a passé et repassé sur le viaduc avec une vitesse d'au moins quatre lieues à l'heure, et a été enrayé brusquement sur le viaduc. Ces essais ont montré que les oscillations transversales d'une demi-travée se maintiennent dans des limites extrêmement étroites; la plus grande flèche de courbure horizontale s'est à peine élevée à $0^m,01$ pendant les essais; la charge permanente des travées, en augmentant leur masse, empêche très-efficacement les oscillations transversales de prendre de l'amplitude.

II.

Il était intéressant d'appliquer le calcul à la détermination des diverses parties qui composent les poutres en treillis du viaduc d'Arquennes et de comparer ses résultats avec les dispositions adoptées.

Les considérations suivantes font d'abord connaître quels sont les efforts auxquels il importe d'avoir égard dans la flexion des poutres en treillis, et quelles sont les conditions dans lesquelles se trouvent les longerons du viaduc d'Arquennes.

Dans une poutre formée de deux tables ou en général de deux ou de plusieurs cours de lisses longitudinales, réunies par une nervure en treillis, l'office de celle-ci est de rendre solidaires les premières pièces, de telle façon que leurs fibres soient soumises à des contractions ou à des extensions, comme si elles appartenaient à une pièce unique, fléchissant à la manière des pièces pleines.

En général, l'on fait abstraction de la résistance que le treillis, en lui-même, peut opposer à la flexion transversale, et l'on considère ainsi les lisses comme intervenant seules pour établir l'équilibre de rotation entre les actions extérieures et les efforts développés suivant les lisses dans une même section transversale; l'on ne se préoccupe point d'ailleurs de l'équilibre de translation verticale, que l'on considère comme s'établissant, de la même manière que dans une pièce pleine, par les forces transverses mises en jeu dans chaque section transversale de la poutre.

Or, si l'on remarque que les lisses, considérées seules, ont une raideur propre extrêmement faible, les charges verticales qu'il faudrait leur appliquer isolément, pour leur faire prendre la forme qu'elles affectent en participant à la flexion générale d'une poutre assemblée, sont très-petites, et il en est nécessairement de même des forces transverses mises en jeu dans chaque section des lisses; dès lors il est manifeste que c'est essentiellement, sinon uniquement, par l'intermédiaire de la nervure que l'équilibre vertical s'établit dans le système, et il importe que les pièces du treillis soient capables, en chaque section, de fournir dans le sens vertical des réactions égales aux efforts extérieurs qui, relativement à la section considérée, tendent à *trancher* verticalement la poutre [1].

L'on voit par là que, dans une poutre en treillis, les bandes longitudinales et les pièces interposées doivent être capables de résister séparément à des efforts déterminés; et dans chaque cas il y a lieu de chercher les valeurs de ces efforts et d'y proportionner les dimensions des lisses et des pièces du treillis, selon les conditions où se trouve la poutre, quant aux charges qu'elle doit recevoir et quant à la manière dont elle est appuyée.

S'il s'agit de travées pour chemins de fer, les longerons sont soumis, en général, comme au viaduc d'Arquennes, à une charge permanente uniformément répartie, et ils ont à résister en outre aux trains qui parcourent les travées. Nous assimilerons l'action de ceux-ci à celle d'une charge supplémentaire, uniforme par mètre courant, qui viendrait couvrir graduellement la travée en s'étendant d'une de ses extrémités vers l'autre; si l'on observe que les pressions des roues d'un train se transmettent aux longerons par l'intermédiaire de rails, de longrines et d'un ballast en sable, l'on peut affirmer

[1] Les ingénieurs anglais ont appelé *efforts tranchants* les efforts dont il s'agit ici; ils ont, les premiers, tenu compte des variations que ces efforts subissent pour renforcer vers les appuis les nervures verticales des poutres.

Dans son ouvrage intitulé : *Travaux d'art, voie, matériel des chemins de fer d'Allemagne*, M. Couche, pour déterminer les efforts qui sollicitent les diverses parties d'une poutre en treillis, a considéré les lisses longitudinales comme étant formées d'une suite d'éléments articulés aux sommets du treillis et résistant simplement comme des pièces tirées ou pressées suivant leurs axes; il a traité le cas d'une poutre librement appuyée, portant une charge uniformément répartie ou un poids appliqué en un point quelconque de la poutre. Nous ne pensons point qu'il soit nécessaire de considérer les lisses comme discontinues et d'abandonner ainsi, pour traiter la question qui nous occupe, la théorie générale de la flexion transversale, la seule qui soit conforme aux faits qui se passent dans la flexion; seulement il y a lieu de considérer simultanément les conditions d'équilibre de rotation et de translation. D'ailleurs la théorie générale de la flexion transversale s'applique seule d'une manière simple et complète à tous les cas qui peuvent se présenter quant au mode de chargement et au mode d'appui des poutres.

que la répartition des pressions ne s'écartera pas notablement de l'uniformité. Dans les applications numériques, nous supposerons d'ailleurs que la charge mobile soit équivalente à un train de machines locomotives, afin de nous placer dans les circonstances les plus défavorables.

Quant au mode d'appui des longerons à leurs extrémités, nous considérerons les poutres du viaduc d'Arquennes comme librement appuyées; la réunion de leurs extrémités avec les supports en fonte qui surmontent les piles et les culées tend, à la vérité, à modifier cette condition, mais nous présenterons plus loin diverses remarques sur ce point.

Dans les hypothèses que nous venons d'énoncer, nous allons déterminer toutes les circonstances de la flexion des longerons qui nous occupent. Nous traiterons successivement de l'équilibre de rotation et de l'équilibre de translation verticale : le premier conduit à la détermination des lisses, le second à celle des pièces du treillis.

—

Équilibre de rotation.—Lisses longitudinales.—Nommons, fig. 1, pl. VI,

a' la distance AP des appuis,

p' la charge permanente uniforme que supporte une poutre par mètre de longueur;

a la longueur variable AM, couverte par la charge mobile,

p la pression par mètre courant due à celle-ci;

ε le moment d'élasticité de la pièce,

μ le changement de longueur qu'éprouvent, par unité de longueur, les fibres les plus éloignées de l'axe d'équilibre, dans une section quelconque dont la distance au plan AA soit représentée par l'abcisse x,

h la distance de ces fibres à l'axe d'équilibre.

En remarquant que la réaction de l'appui en P est mesurée par la somme,

$$p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'},$$

le moment des forces extérieures par rapport à une section quelconque de la partie MP sera,

$$p'\frac{(a'-x)^2}{2}-\left(p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'}\right)(a'-x),$$

et, observant que le moment des forces extérieures développées par la flexion dans une section transversale, a pour mesure le produit $\frac{\varepsilon}{h}\mu$, l'équilibre de rotation relativement à la section considérée sera exprimé par l'équation,

$$\frac{\varepsilon}{h}\mu=p'\frac{(a'-x)^2}{2}-\left(p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'}\right)(a'-x),$$

qui peut se mettre sous la forme,

$$\frac{\varepsilon}{h}\mu=-\left[\frac{p'}{2}(a-x)x+p\frac{a^2}{2a'}(a'-x)\right]\ldots\ldots(1).$$

Pour une section de la partie AM de la pièce, le moment des forces extérieures, exprimé par

$$p'\frac{(a'-x)^2}{2}+p\frac{(a-x)^2}{2}-\left(p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'}\right)(a'-x),$$

fournit l'équation d'équilibre,

$$\frac{\varepsilon}{h}\mu=p'\frac{(a'-x)^2}{2}+p\frac{(a-x)^2}{2}-\left(p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'}\right)(a'-x),$$

ou bien,

$$\frac{\varepsilon}{h}\mu=-\left[\frac{p'+p}{2}(a'-x)x-p\frac{(a'-a)^2}{2a'}x\right]\ldots\ldots(2).$$

Les seconds membres des équations (1) et (2) (abstraction faite du signe négatif, qui indique simplement que la courbure de la pièce est constamment concave vers le haut) sont constamment croissants avec la longueur a, quelle que soit la valeur particulière attribuée à x; la plus grande valeur des moments des forces extérieures, relativement à chaque section de la pièce, correspond donc au cas où la charge mobile couvre entièrement la poutre; et, faisant $a = a'$ dans l'équation (2), il vient pour condition d'équilibre relative à ce cas,

$$\frac{\varepsilon}{h}\mu = -\frac{p'+p}{2}(a'-x)x\ldots\ldots(3).$$

En portant, fig. 2, pl. VI, sur la droite ADP prise pour distance des appuis, des ordonnées proportionnelles aux valeurs que prend le second membre de cette relation, la parabole AdP donne pour chaque abscisse prise suivant AP la valeur du plus grand moment des forces extérieures. Si la pièce présente en chacune de ses sections une résistance uniforme ou si le rapport $\frac{\varepsilon}{h}$ est constant, les fatigues varieront suivant les ordonnées de cette courbe; ou bien, si, en vue d'égaliser les fatigues dans les diverses sections, la résistance est variable, d'une manière continue ou discontinue, il importe, en la supposant déterminée au milieu, qu'elle décroisse du milieu vers les extrémités sans qu'elle puisse en aucun point devenir inférieure à la valeur qui répond aux ordonnées de la courbe AdP.

Examinons, pour les poutres du viaduc d'Arquennes, comment varie leur résistance à la flexion. Les lisses longitudinales y affectent trois profils différents, représentés fig. 3, pl. VI, et l'on trouve aisément par des méthodes connues:

1° Pour la partie moyenne CDE, fig. 2, pl. VI, sur 7 mètres de longueur, et E étant le coëfficient d'élasticité du fer laminé,

$$h = 1^m,267, \quad \varepsilon = 0,0337\ \mathrm{E}, \quad \frac{\varepsilon}{h}\mu = 0,266\ \mathrm{E}\mu,$$

2° Pour les parties intermédiaires BC et EF, sur $7^m,80$ de longueur,

$$h=1^m,234,\quad \varepsilon=0,0325\ \mathrm{E},\quad \frac{\varepsilon}{h}\mu=0,0263\ \mathrm{E}\mu.$$

3° Pour les parties extrêmes AB et FP, sur $9^m,20$ de longueur,

$$h=1^m,533,\quad \varepsilon=0,0208\ \mathrm{E},\quad \frac{\varepsilon}{h}\mu=0,0136\ \mathrm{E}\mu.$$

En élevant ensuite aux points A,B,C,D.... des ordonnées proportionnelles aux valeurs de $\frac{\varepsilon}{h}\mu$ qui correspondent à chacun de ces points, et faisant coïncider l'ordonnée du milieu avec la longueur D*d* déjà tracée, la ligne brisée *a b c d*..... représentera la loi suivant laquelle varie la résistance de la poutre à la flexion transversale.

L'on voit par ce tracé que la résistance des lisses est proportionnellement moindre aux points B et F qu'en tout autre point de la poutre; sans augmenter le poids total des fers, l'on eût pu éviter ces points plus faibles en diminuant un peu les dimensions des lisses dans les parties intermédiaires BC et EF et en prolongeant ces parties vers les extrémités, de manière à ce que le contour brisé *a b c d*..... circonscrive entièrement la coube A*d*P.

Cherchons enfin les plus grandes fatigues dans la section milieu D et dans les sections B et F. L'équation (3) donne

$$\mu=\frac{h}{\varepsilon}\frac{p'+p}{2}(a'-x)x;$$

faisant :

$a'=24$ mètres, distance des appuis,

$p'=\frac{1}{2}\frac{60,000^k}{24}=1,250^k$, en évaluant la charge permanente d'une travée pour une voie simple à $60,000^k$,

$p = \frac{1}{2}\frac{75,000^k}{24} = 1,562^k,5$, en portant à $75,000^k$ par travée ou à $3,125^k$ par mètre courant la charge d'un train de machines locomotives,

$E = 15,000,000,000^k$, valeur admise par plusieurs ingénieurs lorsque les fers ont un fort équarrissage,

$x = 12^m$, $h = 1^m,267$, $\varepsilon = 0,0337\,E$, pour la section D,

$x = 4^m,60$, $h = 1^m,533$, $\varepsilon = 0,0208\,E$, pour les sections B et F,

l'on trouve, abstraction faite du signe négatif,

au milieu de la poutre, $\mu = 0,000508$,

aux sections B et F, $\mu = 0,000617$;

ces valeurs, même la dernière, ne dépassent point les limites que comporte la résistance permanente de la tôle, et l'on peut ainsi regarder les dimensions données aux lisses comme étant pleinement suffisantes.

Nous avons considéré dans ce qui précède les longerons du viaduc d'Arquennes comme étant librement appuyés; la disposition des lisses inférieures, formées simplement de joues verticales sans fers d'angle et par là impropres à résister par compression, et, d'autre part, la réduction apportée aux dimensions des lisses supérieures et inférieures vers les appuis, montrent que les longerons ont été projetés pour résister dans la condition que nous avons supposée. Leur fixation sur les supports ne doit être considérée que comme un moyen supplémentaire de consolidation, ayant pour objet d'encastrer plus ou moins complétement les extrémités et par là d'augmenter la résistance des longerons. Mais cet encastrement, en faisant naître des points d'inflexion dans le longeron, produit, entre ces points et les appuis, des compressions qui exposent les lisses inférieures à des flexions dangereuses près des appuis; il transporte en outre les plus grandes fatigues sur les appuis, où les lisses ont précisément la plus faible résistance. Par cette double raison, nous considérons la fixation des longerons du viaduc d'Arquennes sur les appuis comme étant plutôt nuisible qu'utile; elle empêche d'ailleurs les longerons de suivre librement les changements de longueur qui résultent des variations de la température et peut ainsi les exposer à des fatigues nouvelles.

—

Équilibre de translation verticale. — Nervure en treillis.— L'effort qui tend à trancher verticalement une pièce posée sur deux appuis horizontaux et fléchissant transversalement, a pour mesure, relativement à une section quelconque, la différence entre la charge comprise depuis cette section jusqu'à l'un des appuis et la réaction de cet appui; pour une poutre à nervure en treillis l'équilibre de translation exige, d'après ce que nous avons dit précédemment, que les pièces qui composent le treillis réagissent verticalement avec une intensité égale à cet effort (1).

Si l'on considère une section quelconque de la partie MP de la poutre, fig. 1, pl. VI, non couverte par la charge mobile, l'effort tranchant, d'après les notations précédentes, est exprimé par,

$$p'(a'-x)-\left(p'\frac{a'}{2}+p\frac{a^2}{2a'}\right);$$

en appelant R l'intensité des réactions développées par

(1) Rigoureusement, à cause de la discontinuité du contact des lisses longitudinales avec la nervure, la condition énoncée ne saurait point être satisfaite relativement à chaque section verticale faite dans une nervure en treillis; elle doit exister néanmoins dans l'intervalle de deux sommets successifs du treillis, et cela suffit pour que sa traduction par l'analyse puisse nous conduire à la loi suivant laquelle varient, dans toute l'étendue de la pièce, les réactions mises en jeu dans le treillis.

extension ou contraction suivant l'axe des pièces du treillis qui aboutissent à la section considérée, et nommant α l'angle constant que forment les barres du treillis avec la verticale, l'on doit avoir,

$$R \cos \alpha = p' (a' - x) - \left(p' \frac{a'}{2} + p \frac{a^2}{2a'} \right)$$

ou

$$R \cos \alpha = p' \left(\frac{a'}{2} - x \right) - p \frac{a^2}{2a'} \quad \ldots\ldots (4).$$

Relativement à une section de la partie AM, couverte par la charge mobile, l'effort précédent a pour expression,

$$p' (a' - x) + p (a - x) - \left(p' \frac{a'}{2} + p \frac{a^2}{2a'} \right)$$

et l'on doit encore avoir l'équation,

$$R \cos \alpha = p'(a' - x) + p(a - x) - \left(p' \frac{a'}{2} + p \frac{a^2}{2a'} \right)$$

ou

$$R \cos \alpha = (p' + p) \left(\frac{a'}{2} - x \right) - p \frac{(a' - a)^2}{2a'} \quad \ldots\ldots (5).$$

Examinons comment varient, avec a, les seconds membres des équations (4) et (5). Pour $a = 0$ et pour $a = a'$, ces équations deviennent respectivement,

$$R \cos \alpha = p' \left(\frac{a'}{2} - x \right), \quad \ldots\ldots (6)$$

$$R \cos \alpha = (p' + p) \left(\frac{a'}{2} - x \right), \quad \ldots\ldots (7).$$

et les seconds membres de ces relations donnent, en chaque section de la poutre, l'effort qui tend à trancher celle-ci, lorsqu'elle est couverte par une charge uniformément répartie dont le poids par mètre courant est successivement égal à p' et à $(p'+p)$. Pour $x=0$ et pour $x=a'$, les valeurs de l'effort sont $\pm\, p'\frac{a'}{2}$ et $\pm\,(p'+p)\,\frac{a'}{2}$, et si l'on élève, fig. 4, pl. VII, aux extrémités de la longueur AP, des ordonnées Aa', Pp', Aa, Pp proportionnelles à ces grandeurs, en faisant par exemple $p=\frac{5}{4}p'$, ainsi que cela résulte des valeurs attribuées précédemment à p' et p, puis si l'on mène les droites $a'Ep'$, aEp, les seconds membres des relations (6) et (7) seront donnés pour chaque section de la poutre par les ordonnées comprises entre ces droites et la ligne AEP ; la valeur positive ou négative des ordonnées indique, relativement à la section à laquelle elles appartiennent, que l'effort résultant est dirigé de haut en bas, en sens contraire de la réaction au point P, ou de bas en haut, dans le même sens que cette réaction.

Dans l'hypothèse d'une charge uniformément répartie, l'on voit donc que le treillis doit être capable de résister à des efforts dont la plus grande valeur est près des appuis et qui décroissent uniformément vers le milieu où ils sont nuls ; cette dernière circonstance a lieu d'ailleurs pour une charge quelconque distribuée symétriquement par rapport au milieu du longeron et quelle que soit la manière dont les extrémités de la poutre sont supportées.

Lorsque la valeur de a augmente à partir de zéro, et tant que l'extrémité de la charge n'a pas atteint une section déterminée, dont l'abscisse est x, l'équation (4), alors applicable, montre par son second membre que l'effort tranchant va en diminuant jusqu'à $a=x$. Pour cette valeur, les seconds membres des équations (4) et (5) sont identiques et l'on a,

$$R\cos\alpha = p'\left(\frac{a'}{2}-x\right)-p\frac{x^2}{2a'}\ldots\ldots(8).$$

Il est aisé de construire la courbe parabolique représentée par cette équation : elle passe par les points a' et p déterminés ci-dessus (fig. 4, pl. VI) et est tangente en ces points aux droites $a'E$ et Ep ; en faisant $p = \frac{5}{4} p'$, l'on trouve que le second membre s'annule pour $x = 0,4\, a' = Am$, et la courbe coupe au point m la droite AEP ; pour d'autres valeurs de x, il sera aisé de construire autant de points que l'on voudra et de tracer ainsi la ligne $a'mnp$ qui donne la loi suivant laquelle varie l'effort tranchant dans les diverses sections, lorsque l'extrémité de la charge atteint celles-ci.

Si l'on considère ensuite des valeurs de a plus grandes que x, l'on voit par le second membre de l'équation (5), applicable à ce cas, que la valeur de l'effort tranchant augmente jusqu'à ce que a devient égal à a'; la courbe $a'mnp$ appartient donc aux valeurs absolues les plus petites que cet effort prend pendant le passage de la charge mobile.

Lorsque celle-ci, après avoir couvert entièrement la travée, continue à se déplacer, il est aisé de voir, quand l'extrémité de la charge aboutit à une section déterminée, que l'effort tranchant y prendra, abstraction faite du signe, la même valeur qu'elle affectait dans la section qui lui est symétrique par rapport au milieu, la charge mobile s'étendant jusqu'à cette section ; de telle sorte qu'en imaginant que la courbe $a'mnp$ tourne de 180° autour du point E pour prendre la position $am'n'p'$, les ordonnées de cette courbe mesureront les valeurs absolues les plus grandes de l'effort tranchant dans chaque section.

En résumé, dans une section quelconque, les efforts tranchants passeront successivement par les ordonnées qui répondent à la droite $a'Ep'$, — à la courbe $a'mnp$, — à la droite aEp, — à la courbe $an'm'p'$, — et de nouveau à la droite $a'Ep'$. Dans les parties Am et $m'P$ l'effort est toujours dirigé dans le même sens ; les barres du treillis, dont la rencontre avec une verticale menée au milieu de la poutre, fig. 1, pl. VI, a lieu vers le haut, seront constamment comprimées, tandis que celles dont la rencontre avec cette verticale a lieu au-dessous de la poutre seront étendues. Dans la partie moyenne mm' au contraire, l'effort tranchant varie de direction selon la position de la charge mobile, et les barres du treillis sont alternativement comprimées et étendues; cette circonstance exclurait l'emploi de la fonte dans la zone *m m'*, si elle était adoptée pour les pièces comprimées dans les autres zones.

Il résulte donc de la discussion précédente que les valeurs les plus grandes de l'effort tranchant répondent dans chaque moitié de la pièce aux ordonnées des courbes *a n'* et *n p ;* si le treillis présente une résistance uniforme, la plus grande fatigue de ses diverses parties variera en chaque section suivant ces ordonnées; si la résistance du treillis est variable, elle doit aller en diminuant des extrémités de la pièce vers le milieu, et il importe, en la supposant déterminée près des supports, qu'elle ne décroisse point plus rapidement que suivant les courbes *a n'* et *p n*.

Les longerons du viaduc d'Arquennes offrent, sur chaque moitié, quatre zones AB, BC, CD, DE, figures 1 et 4, pl. VI, dont les résistances sont différentes; les barres du treillis y ont des dimensions constantes, tandis que le nombre de barres rencontrées par un plan vertical est de 8, 6, 4 et 2; en admettant que, dans une section quelconque, toutes les pièces concourent d'une manière égale à l'équilibre, les unes par contraction, les autres par extension, la résistance du treillis est proportionnelle aux nombres précédents; et si l'on considère celle-ci comme étant représentée par l'ordonnée A*a*, fig. 4, dans la section AA, fig. 1, la ligne brisée *abcde*, dont les distances à l'axe AE varient dans le rapport des nombres 8, 6, 4 et 2, donnera la loi suivant laquelle varie la résistance du treillis dans les poutres du viaduc d'Arquennes. L'on voit que cette ligne brisée se rapproche d'une manière très-satisfaisante de la courbe *a n'* tracée d'après les considérations exposées précédemment, et les dispositions admises se trouvent ainsi parfaitement motivées.

La section du treillis où la fatigue est la plus grande répond au point c pour lequel la différence relative entre les ordonnées de la courbe $a\,n'$ et celles de la ligne brisée $a\,e$ est la plus considérable; cherchons la valeur de la fatigue dans cette section et aussi dans celle qui répond au point d'appui A. En désignant par ω la section transversale des barres du treillis et par n le nombre de barres rencontrées par un même plan vertical, la fatigue de l'une d'elles, en admettant toujours qu'elles concourent également à l'équilibre, sera exprimée par

$$\mu = \frac{1}{n}\frac{R}{E\omega},$$

μ et E ayant les significations déjà indiquées; en vertu de l'équation (8) cette valeur devient,

$$\mu = \frac{1}{n}\frac{1}{E\omega}\frac{1}{\cos\alpha}\left\{p'\left(\frac{a'}{2}-x\right)-p\frac{x2}{2a'}\right\};$$

Mais la formule (8) convenant seulement au calcul des ordonnées de la courbe inférieure $a'\,m\,n\,p$, on observera qu'il faudra, pour avoir les fatigues qui répondent aux ordonnées de la courbe $a\,n'$ dans les points A et c, calculer à l'aide de la formule précédente les fatigues qui ont lieu dans les sections symétriques P et F, pour lesquelles x est égal à 24 mètres et à $19^{m},50$. Substituant ces valeurs, et faisant en outre :

n successivement égal à 8 et à 4,

$a' = 24^{m}$,

$p' = 1250^{k}$,

$p = 1562^{k},5$,

$\cos\alpha = \frac{2^{m},10}{2^{m},90}$ ou $\frac{1}{\cos\alpha} = 1,381$,

$\omega = 0^{m},07 \times 0^{m},02 = 0^{m2},0014$,

$E = 15,000,000,000^{k}$,

l'on trouve, abstraction faite du signe négatif,

aux points A et P, $\mu = 0{,}000277$,
aux points C et F, $\mu = 0{,}000358$.

Ces fatigues correspondent à des charges de $4^k{,}155$ et $5^k{,}37$ par millimètre carré; comme on le voit, ces charges sont très-faibles, mais la liaison établie entre les pièces du treillis aux points où elles se croisent, en vue d'éviter la flexion de ces pièces par compression et d'ajouter en même temps à la résistance transversale de la poutre, a pour effet inévitable de produire des flexions dans les barres du treillis lorsque la poutre fléchit. Cette circonstance oblige à ne point soumettre les treillis à des efforts directs trop grands, et il peut être convenable à cet égard de ne point dépasser les valeurs précédentes [1]. D'ailleurs moins sont grands les changements de forme que les pièces du treillis peuvent prendre, en ne les soumettant qu'à une faible fatigue, moins le tassement général de la nervure sous le passage des charges sera considérable et mieux se maintiendra la forme générale de la poutre.

La manière dont la résistance du treillis a été envisagée dans ce qui précède conduit à la détermination de l'inclinaison qu'il convient de donner aux barres d'une nervure en treillis, pour que, à égalité de résistance dans le sens vertical, la quantité de matière employée à la nervure soit *minima*.

En général, un treillis se compose d'une ou de plusieurs suites de pièces dont les points de rencontre sont sur les lisses horizontales qui limitent la poutre; il importe que les dispositions des barres soient telles que les intervalles de

[1] Dans certains ponts américains, l'on n'a point relié les pièces du treillis aux points de croisement; dès que l'on donne à ces pièces des formes transversales qui empêchent leur flexion et que les dimensions des lisses suffisent pour l'équilibre de rotation, cette disposition nous semble recommandable.

deux points de contact successifs du treillis avec les lisses ne permettent point la flexion de celles-ci, sous l'action de la charge directe qu'elles peuvent recevoir ou sous l'action d'un effort de compression.

Or, il est aisé de voir, en examinant les types représentés figures 5, 6 et 7, pl. VI, où les sommets du treillis sont également espacés sur les lisses et où la flexion directe de celles-ci peut ainsi être considérée comme évitée au même degré, que l'on peut remplir la condition précédente de diverses manières, selon l'inclinaison donnée aux pièces du treillis et selon le nombre des suites de pièces interposées entre les lisses. Dans ces diverses dispositions, les quantités de matière répondant à une même portion $m\ n\ p\ q$ de la poutre ne sont pas les mêmes, et nous allons chercher la condition qui les rend *minima*.

En appelant α l'angle des barres du treillis avec la verticale et h la distance, supposée constante, des axes des lisses extrêmes, la longueur totale des barres comprises dans la portion $m\ n\ p\ q$ sera exprimée, quel que soit α, par

$$2\frac{h}{\cos\alpha}.$$

D'autre part, φ étant l'effort tranchant dans la section mn et n désignant le nombre de barres, supposées uniformes, qui y aboutissent, la réaction mise en jeu dans chaque barre sera exprimée par

$$\frac{1}{n}\frac{\varphi}{\cos\alpha};$$

mais le nombre n est double de celui des intervalles constants δ compris sur une des lisses, entre l'extrémité de la poutre et le point où aboutit sur cette lisse la barre qui part de l'angle opposé de la poutre, et l'on a

$$n = 2\frac{h\tan\alpha}{\delta};$$

la réaction précédente peut donc être exprimée par,

$$\frac{\varphi\delta}{2h\sin\alpha},$$

et la section des barres doit être proportionnelle à cette valeur.

De là résulte que la quantité de matière comprise dans la portion $m\,n\,p\,q$ du treillis est proportionnelle au produit,

$$\frac{2h}{\cos\alpha}\times\frac{\varphi\delta}{2h\sin\alpha}\text{ ou }\frac{\varphi\delta}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

dont la valeur la plus petite répond à $\alpha = 45°$, et telle est l'inclinaison la plus avantageuse à donner aux barres du treillis.

Elle a été adoptée dans la construction de beaucoup de poutres en treillis ; au viaduc d'Arquennes elle a également été admise, sauf une légère différence. Pour les longerons de cet ouvrage, le plus grand écartement des points de contact de la nervure avec les lisses est de 1 mètre ; afin de ne pas changer l'équarrissage des barres, tout en diminuant la résistance de la nervure de la poutre vers le milieu, la distance des sommets du treillis a été portée à 2 mètres et l'on a eu recours, dans la partie moyenne, à des poteaux d'appui qui soutiennent les lisses entre deux sommets ; vers les extrémités les pièces sont doublées, de telle sorte que la distance entre les sommets du treillis est réduite à $0^m,50$ [1].

Tout ce qui concerne la résistance des nervures en treillis s'applique nécessairement aux poutres formées de lisses

[1] Dans les longerons du système Néville (tome XII des *Annales des travaux publics*), la disposition de la nervure ne comporte point le croisement des pièces. Pour que les sommets de la nervure soient convenablement rapprochés sur les lisses, les barres qui la composent font avec la verticale un angle beaucoup moindre que 45° ; il en résulte un désavantage sur les treillis du système des ponts américains. Le système Néville ne permet point aussi de faire facilement varier la résistance de la nervure d'un point à l'autre de la poutre.

longitudinales réunies par une nervure pleine. La résistance de celle-ci doit être proportionnée en chaque section aux valeurs que prend l'effort tranchant, mais il est plus difficile de donner, *à priori*, des règles propres à déterminer les dimensions absolues qu'il convient de donner à la nervure en un point déterminé de la poutre.

Gand, le 24 avril 1855.