

# LOGICIEL D'ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PONTS SOUS CONVOI FERROVIAIRE APPLICATION AUX PONTS MIXTES DES LIGNES À GRANDE VITESSE

par M. CAZENAVE, Ph. RAMONDENC et D. MION

## 1. - INTRODUCTION

Afin de prendre en compte l'ensemble de leur comportement dynamique au passage des convois rapides, les ouvrages d'art de la SNCF, étudiés dans le cadre des lignes à grande vitesse

notamment, sont vérifiés par simulation informatique des circulations.

Cette vérification a pour but de s'assurer que les coefficients dynamiques à affecter aux schémas de charge de dimensionnement tels l'UIC 71 et le SW 2, établis sans tenir compte de



---

**M. Cazenave** – Ingénieur CTICM, Département Conception et Calculs.  
**Ph. Ramondenc** – Direction de l'Équipement; chef de la division des Grands Ouvrages Métalliques et Mixtes SNCF.  
**D. Mion** – Direction de l'Équipement; division des Grands Ouvrages Métalliques et Mixtes SNCF

---

vitesses de circulation supérieures à 250 km/h et pratiquement en dehors de plages de résonance, enveloppent les sollicitations dues aux convois réels et surtout que d'autres paramètres purement dynamiques, tels l'accélération verticale, respectent les critères de sécurité et de confort vis-à-vis du service ferroviaire (stabilité de la voie, contact rail-roue, confort des usagers, ...).

Cette démarche de vérification dynamique, reprise par le projet d'Eurocode 1 sur les charges (actions ferroviaires), revêt une acuité toute particulière dans le cadre des ponts métalliques et mixtes qui, de par leurs caractéristiques de masse et d'inertie ainsi que leur faible taux d'amortissement critique, peuvent avoir une réponse dynamique amplifiée dans les plages des vitesses commerciales de circulation.

La méthodologie retenue notamment pour les ouvrages type ponts mixtes de la ligne TGV Nord et TGV Lyon-Valence, ainsi que pour l'interconnexion Ile-de-France, était la suivante :

- Modélisation de l'ouvrage en l'assimilant à une poutre dans le cas d'une géométrie simple (bipoutre sans biais prononcé) ou avec un modèle plus élaboré (treillis spatial pour le pont Warren sur la Deule,...); le coefficient d'équivalence acier-béton étant considéré égal à 10, le béton fissuré sous charges permanentes étant négligé sur appui.
- Analyse modale de la structure pour déterminer les modes principaux de flexion verticale et torsion pouvant être excités par le passage des circulations.
- Après sélection d'un certain nombre de vitesses en fonction des modes principaux et des conditions d'exploitation de la ligne, pour chacune d'entre elles, génération de l'historique de chargement simulant le passage du convoi, afin d'obtenir la réponse de l'ouvrage, elle-même sous forme d'historiques de déformations.
- Enveloppe des résultats ainsi que leurs dérivés afin de s'assurer que l'ensemble des critères (efforts, déformations, accélérations,...) sont respectés quelles que soient les vitesses des programmes complémentaires - développés par le CTICM à la demande de la SNCF - tels **Fatig** ou **Dynabog** permettant d'obtenir les sollicitations de fatigue ou le comportement des véhicules en voie.

Si cette méthode de calcul permet d'obtenir à une vitesse donnée l'ensemble des paramètres ainsi que leur évolution au cours du temps, elle reste relativement « aveugle » sur l'évolution des extrêmes de ces paramètres en fonction de la vitesse, sauf si l'on réalise un nombre très important de calculs.

L'ingénieur détermine *a priori* les vitesses qui seront « critiques », c'est-à-dire qui produiront l'effet extrême : ce choix basé sur l'analyse de l'excitation due au convoi et le comportement de l'ouvrage, devrait être confirmé par une recherche des extrêmes en faisant varier la vitesse.

Cette étape est maintenant possible grâce au programme **Harmonie** qui, grâce à son économie de temps de calcul et d'exploitation, permet un tel balayage dans des délais et des coûts acceptables, y compris dans le cadre des études d'exécution de l'ouvrage.

L'exemple du viaduc du Bancel montre en particulier que pour un amortissement faible, une double rame TGV générera une excitation maximale pour une vitesse qui ne correspond pas à la vitesse critique conventionnelle déduite de l'espace-temps standard entre boggies; d'où l'intérêt d'un balayage quasi-continu qui, seul, permet de s'assurer que la situation la plus critique a été prise en compte. Le principal avantage d'**Harmonie** réside dans la facilité d'exécution d'un tel balayage.

Le CTICM, en collaboration avec la SNCF, a développé une méthodologie de calcul originale et un logiciel capable d'évaluer avec précision, la réponse dynamique de l'ouvrage, volontairement limitée à quelques paramètres dynamiques significatifs - flèches et accélérations en milieu de travée, rotations sur appuis, etc... - pour une plage de vitesses donnée et ceci avec des temps de calculs compatibles avec les contraintes d'une étude d'exécution.

L'approche retenue ici consiste essentiellement en une décomposition en série de **Fourier** du chargement dynamique généré par le passage d'un train sur le pont puis dans le calcul de la réponse harmonique de l'ouvrage.

L'ensemble du logiciel **Harmonie** est articulé autour du code de calcul Ansys Rev.5.0A développé par Swanson Analysis System Inc. (SASI) et comporte différents modules capables d'effectuer la décomposition en série de **Fourier** du chargement ainsi que les traitements nécessaires à l'obtention de la réponse finale à toutes les vitesses de passages désirées.

## 2. - NOTATIONS

$m$	: nombre d'harmoniques,
$n$	: nombre de pas de temps,
$l$	: nombre de modes,
$L_{pout}$	: longueur totale de l'ouvrage (m),
$L_{rame}$	: longueur totale de la rame (m),
$v$	: vitesse (m/s),
$\omega_v$	: pulsation de base associée à la vitesse de passage $v$ (rad/s),
$\xi$	: amortissement (%),
$a_{F_j}, b_{F_j}$	: les coefficients de forces associés à chacune des harmoniques,
$\{q(t)\}$	: vecteur déplacements,
$\{\dot{q}(t)\}$	: vecteur accélérations,
$\{\dot{q}'(t)\}$	: vecteur vitesses,
$[M]$	: matrice de masse de la structure (repère global),
$[C]$	: matrice d'amortissement de la structure (repère global),
$[K]$	: matrice de rigidité de la structure (repère global),
$[\Phi]$	: base modale,
$[m]$	: matrice de masse diagonale (base modale),
$[c]$	: matrice d'amortissement diagonale (base modale),
$[k]$	: matrice de rigidité diagonale (base modale),
$\{F(t)\}$	: vecteur forces.

## 3. - PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE CALCUL

Considérons le chargement généré sur l'ouvrage par le passage d'une rame TGV à la vitesse  $v$ , chaque force ou moment associé à un nœud de discrétisation de l'ouvrage peut être décomposé en série de **Fourier** de la façon suivante :

$$F_v(t) = a_{F_0} + \sum_{j=1}^m a_{F_j} \cos(j\omega_v t) + b_{F_j} \sin(j\omega_v t) \quad (3.1)$$

$$M_v(t) = a_{M_0} + \sum_{j=1}^m a_{M_j} \cos(j\omega_v t) + b_{M_j} \sin(j\omega_v t) \quad (3.2)$$

- où  $m$  : nombre d'harmoniques retenues,  
 $\omega_v$  : pulsation de base associée à la vitesse de passage  $v$  (précisée au chapitre 4),  
 $a_{F_j}, b_{F_j}$  : coefficients de forces associés à chacune des harmoniques.



L'équilibre dynamique s'exprime alors sous la forme :

$$[M] \cdot \{\ddot{q}\} + [C] \cdot \{\dot{q}\} + [K] \cdot \{q\} = \{F_{a_v}\} + \sum_{j=1}^m \{F_{a_j}\} \cdot \cos(j\omega_v t) + \{F_{b_j}\} \cdot \sin(j\omega_v t) \quad (4.9)$$

Partant du principe que le système étudié a un comportement linéaire, la réponse dynamique forcée peut être considérée après cette décomposition comme la sommation d'une réponse statique au chargement  $\{F_{a_v}\}$  et de  $2m$  réponses dynamiques à des chargements harmoniques d'amplitudes  $\{F_{a_j}\}_{j=1..m}$  et  $\{F_{b_j}\}_{j=1..m}$ .

*Note* : Le calcul harmonique est un calcul de réponse (forcée) qui est réservé uniquement aux excitations sinusoïdales. Il part du principe que le chargement étant sinusoïdal de fréquence  $f$  et d'amplitude  $F$ , la réponse sera de même fréquence et d'amplitude  $U$  déduite de la solution particulière de l'équation de l'équilibre dynamique. Les données nécessaires à ce type de calcul sont donc l'amplitude des charges et la plage de fréquences (cf Annexe A : chapitre 5).

Pour ce qui concerne le programme **HARMONIE**, les amplitudes de charges seront donc déterminées par la décomposition décrite au chapitre 4.2 et la plage de fréquences sera définie à partir des vitesses minimale et maximale de la rame.

La réponse forcée à la vitesse  $v$  a donc pour expression :

$$\{q_f(t)\} = \{q_{a_v}\} + \sum_{j=1}^m \{q_{a_j}(v)\} \cos(j\omega_v t) + \{q_{b_j}(v)\} \sin(j\omega_v t) \quad (4.10)$$

**4.3. - Réponse transitoire**

Une fois la réponse forcée définie, il est nécessaire de déterminer à partir des conditions initiales (déplacements et vitesses initiaux nuls, car l'ouvrage est évidemment au repos avant le passage du train), la partie transitoire de la réponse finale.

Partant du changement de base (4.10) :

$$\{q(t)\} = [\Phi] \cdot \{y(t)\} \quad (4.11)$$

Le déplacement  $\{y(t)\}$  défini dans la base modale représente la somme des réponses transitoire et forcée.

$$\{y(t)\} = \{y_t(t)\} + \{y_f(t)\} \quad (4.12)$$

De la même façon, la réponse dans le repère global peut être écrite sous la forme :

$$\{q(t)\} = \{q_t(t)\} + \{q_f(t)\} = [\Phi] \cdot (\{y_t(t)\} + \{y_f(t)\}) \quad (4.13)$$

Là encore, la partie transitoire peut s'exprimer à partir des réponses des oscillateurs simples (cf. Annexe A : chapitre 3) associés à chacun des modes, soit :

$$\{q_t(t)\} = [\Phi] \cdot \begin{bmatrix} e^{-\xi\omega_1 t} \cdot (k_{11} \cdot \cos(\omega_{d1} t) + k_{21} \cdot \sin(\omega_{d1} t)) \\ e^{-\xi\omega_2 t} \cdot (k_{12} \cdot \cos(\omega_{d2} t) + k_{22} \cdot \sin(\omega_{d2} t)) \\ \vdots \\ e^{-\xi\omega_l t} \cdot (k_{1l} \cdot \cos(\omega_{dl} t) + k_{2l} \cdot \sin(\omega_{dl} t)) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

avec :

- $l$  : nombre de modes ( $\leq$  nombre de degrés de liberté)
- $\xi$  : amortissement

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots, \omega_l$  : pulsations propres

$$\omega_{d_i} = \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

$k$  : constantes dépendant des conditions initiales

à  $t = 0$ , les déplacements et vitesses initiaux transitoires dans la base modale ont pour expression :

$$\{y_t(0)\} = \{k_1\}$$

$$\frac{d\{y_t(0)\}}{dt} = [\omega] \cdot (\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \{k_2\} - \xi \cdot \{k_1\})$$

avec : 
$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_l \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Reprenant l'expression de la réponse forcée  $\{q_f(t)\}$  déterminée au chapitre 4.2 :

$$\{q_f(t)\} = \{q_{a_v}\} + \sum_{j=1}^m \{q_{a_j}(v)\} \cos(j\omega_v t) + \{q_{b_j}(v)\} \sin(j\omega_v t) \quad (4.16)$$

La réponse et la vitesse à  $t = 0$  dans la base modale deviennent :

$$\{y(0)\} = \{y_t(0)\} + \{y_f(0)\} = \{k_1\} +$$

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot \left( \{q_0\} + \sum_{j=1}^m \{q_{a_j}\} \right) = \{0\} \quad (5.17)$$

$$\frac{d\{y(0)\}}{dt} = \frac{d\{y_t(0)\}}{dt} + \frac{d\{y_f(0)\}}{dt} = [\omega] \cdot (\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \{k_2\} - \xi \cdot \{k_1\}) + [\Phi]^T \cdot [M] \cdot \left( \omega_v \cdot \sum_{j=1}^m j \cdot \{q_{b_j}\} \right) = \{0\}$$

d'où :

$$\{k_1\} = -[\Phi]^T \cdot [M] \cdot \left( \{q_0\} + \sum_{j=1}^m \{q_{a_j}\} \right)$$

$$\{k_2\} = -\frac{\omega_v}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot [\omega]^{-1} \cdot [\Phi]^T \cdot [M] \cdot \left( \sum_{j=1}^m j \cdot \{q_{b_j}\} \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \{k_1\} \quad (4.18)$$

**5. - EXEMPLE D'UTILISATION  
DU PROGRAMME HARMONIE**

L'exemple illustrant l'utilisation de ce programme est inspiré d'une étude faite par le CTCM en 1991 qui consistait à déterminer le comportement dynamique d'un ouvrage de la ligne TGV-Sud-Est : le Viaduc du Bancel.



TGV Sud-Est : Viaduc du Bancel

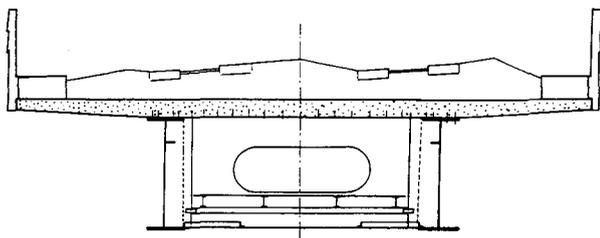


Fig. 1 - Coupe transversale sur entretoise courante

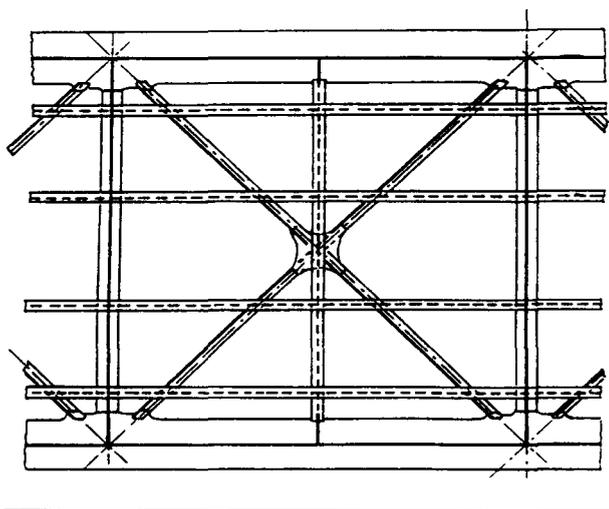


Fig. 2 - Contreventement inférieur

Ce viaduc comporte 5 travées, 37 m pour les travées de rive et 48 m pour les travées centrales. Les zones de fissuration du béton sont prises égales à 10 m de part et d'autre de chacun des appuis intermédiaires. Les pièces de pont (voir fig. 1) sont espacées de 6,86 m pour les travées centrales et 6,16 m pour les travées de rives. Le contreventement (voir fig. 2) est constitué d'un treillis « en croix » formé de cornières de 180 × 180 × 18.

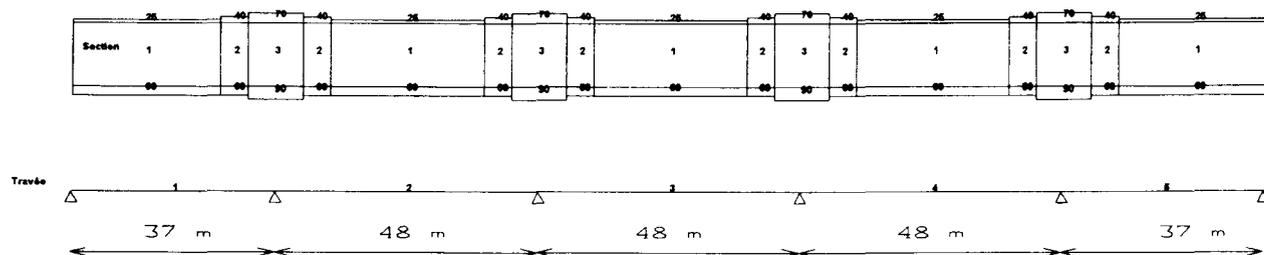
Le plan de répartition matière comporte 3 types de sections différentes dont les caractéristiques sont présentées à la figure 3.

Les conditions d'appuis intègrent un blocage du déplacement vertical (axe Y) et de la rotation de torsion (axe X). En effet, les pièces de pont sur piles et la modélisation filaire de l'ouvrage nous amènent à considérer la rigidité de torsion sur appuis comme infinie.

La masse longitudinale de l'ouvrage est considérée comme constante et est fixée à 29 220 kg/ml. Le moment d'inertie de masse en rotation est lui évalué à 401 900 m<sup>2</sup> kg/ml. Le nombre de modes extrait est limité à 30. Pour chacun de ces modes, un amortissement de 0,5 % est pris en compte.

Le chargement dynamique dû au passage du train est modélisé sous forme d'historique de forces et de moments appliqués aux nœuds de la structure. Le train est constitué de deux rames TGV de 237,59 m chacune. La description des charges formant le convoi est indiquée à la figure 4 (1 seule rame).

L'étude sera conduite pour une plage de vitesses comprise entre 150 et 400 km/h par pas de 5 km/h (50 vitesses). L'historique de chargement en chaque nœud du modèle de calcul est déterminé pour une vitesse de passage de la rame arbitrairement fixée à 300 km/h, avec un pas de scrutation de 0,025 s. Le nombre d'harmoniques a été fixé à la valeur la plus élevée possible soit 166.



Section	Épaisseur âme (mm)	Épaisseur semelle supérieure (mm)	Épaisseur semelle inférieure (mm)	Béton fissuré	Aire (m <sup>2</sup> )	Aire cisaillement (m <sup>2</sup> )	Inertie de flexion (m <sup>4</sup> )	Inertie de torsion (m <sup>4</sup> )
1	24	25	60	non	4,532	0,1495	1,215	0,41
2	26	40	60	oui	0,363	0,162	0,665	0,41
3	26	70	90	oui	0,482	0,162	0,964	0,41

Fig. 3 - Viaduc du Bancel : répartition matières

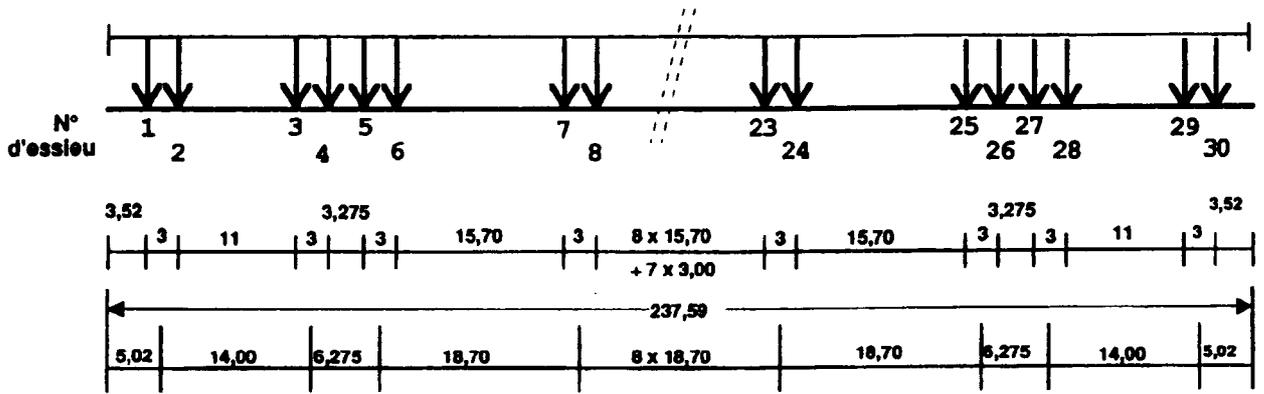


Fig. 4 - Charge normale : tous les essieux = 17 t  
 $P = 17 \times 30 = 510 \text{ t}$

En effet, le nombre de pas de temps est directement lié à la vitesse de passage et au pas de temps de référence. Compte tenu de la méthodologie retenue pour la décomposition en série de **Fourier** (cf. chapitre 4.1), le nombre d'harmoniques demandé doit donc respecter la condition suivante :

$$\text{nombre de pas de temps } n = \frac{L_{\text{pont}} + L_{\text{rame}}}{\text{vitesse} \times \text{pas}} \geq 2 \times \text{nombre d'harmoniques} + 1$$

$$n = \frac{218 + 2 \times 237,59}{\frac{300}{3,6} \times 0,025} = 333$$

Les tracés ci-dessous correspondant au chargement dynamique appliqué au nœud situé au milieu de la travée 3 mettent en évidence la précision de cette décomposition. En effet, pour tous les nœuds du modèle, les restes  $\sqrt{\sum_{k=1}^n R(t_k)^2}$  tendent vers 0, ce qui traduit donc une très bonne juxtaposition des

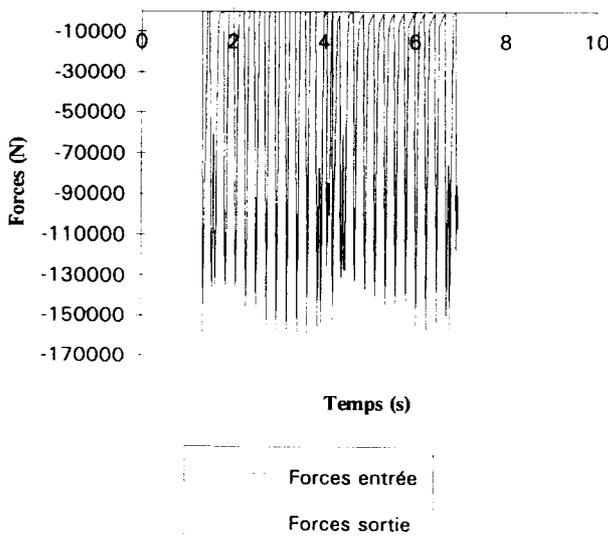


Fig. 5 - Courbes de charges en milieu de travée 3

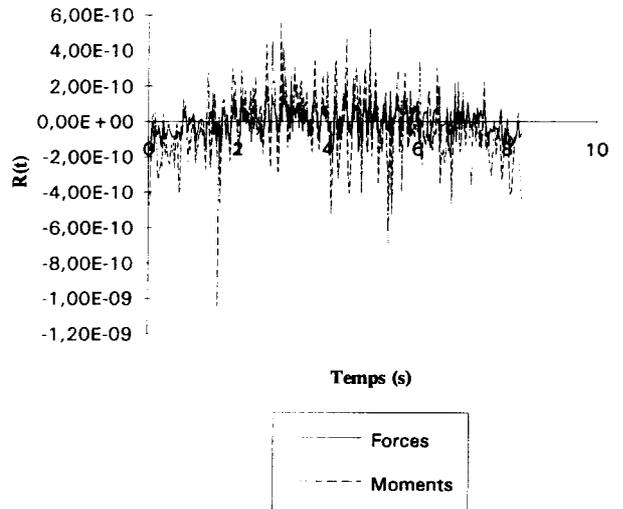


Fig. 6 - Évolution du reste R(t) en milieu de travée 3

courbes d'entrée (historiques de chargement) et de sortie (reconstitution du chargement à partir des coefficients de **Fourier**).

Le pas de temps utilisé pour la reconstitution de la réponse de chacune des vitesses est fixé à 0,01 s.

### 5.1. - Résultats de l'analyse modale

Les vitesses conventionnelles critiques sont déterminées en supposant que la fréquence principale d'excitation est liée à la distance séparant 2 axes de boggies successifs :

$$d = 18,70 \text{ m pour une rame TGV.}$$

Pour une période donnée  $T_i$ , la vitesse critique conventionnelle associée est donc :

$$V_i = \frac{d}{T_i}$$

Mode	Période (s)	Vitesse critique (km/h)	Type de mode
1	0,4913	137	Flexion travée 2, 3 et 4 (1 onde)
2	0,4028	167	Flexion travée 1, 2, 3, 4 et 5 (1 onde)
3	0,3346	201	Torsion travée 5 (1 onde)
4	0,3346	201	Torsion travée 4 (1 onde)
5	0,3345	201	Torsion travée 3 (1 onde)
6	0,3243	208	Flexion travée 1, 2, 3, 4 et 5 (1 onde)
7	0,2592	260	Flexion travée 1 et 5 (1 onde)
8	0,2580	261	Torsion travée 5 (1 onde)
9	0,2580	261	Torsion travée 1 (1 onde)
10	0,2519	267	
11	0,1676	402	Torsion travée (2 ondes)
12	0,1676	402	Torsion travée 4 (2 ondes)
13	0,1675	402	Torsion travée 3 (2 ondes)
14	0,1484	454	
15	0,1331	506	
16	0,1294	520	
17	0,1294	520	
18	0,1202	560	
19	0,1122	600	
20	0,1122	600	
21	0,1120	601	
22	0,0924	729	
23	0,0919	732	
24	0,0867	777	
25	0,0867	777	
26	0,0845	797	
27	0,0845	797	
28	0,0843	799	
29	0,0777	866	
30	0,0732	919	

Remarque : Le blocage des appuis en rotation entraîne un découplage des modes de torsion de chacune des travées (elles se comportent en torsion comme des travées indépendantes). Dans le cas des ponts biais – ce qui n'est pas le cas du Viaduc du Bancel – la modélisation doit intégrer cette particularité afin de prendre en compte le couplage qui apparaît naturellement entre les modes de torsion et de flexion.

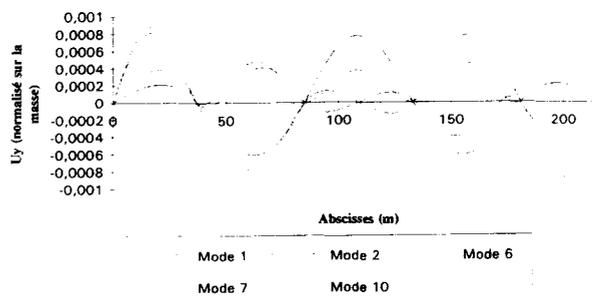


Fig. 7 – Analyse modale : modes de flexion

5.2. – Comparaison des résultats à la vitesse de 300 km/h

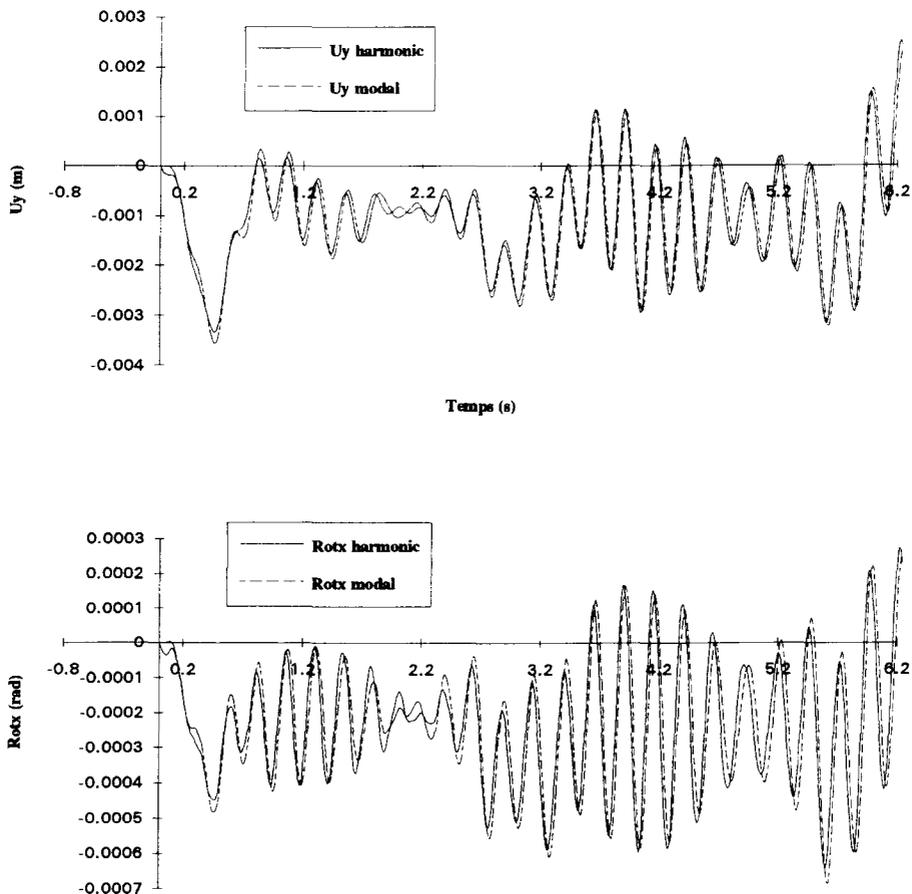


Fig. 8 – Milieu de la travée 1

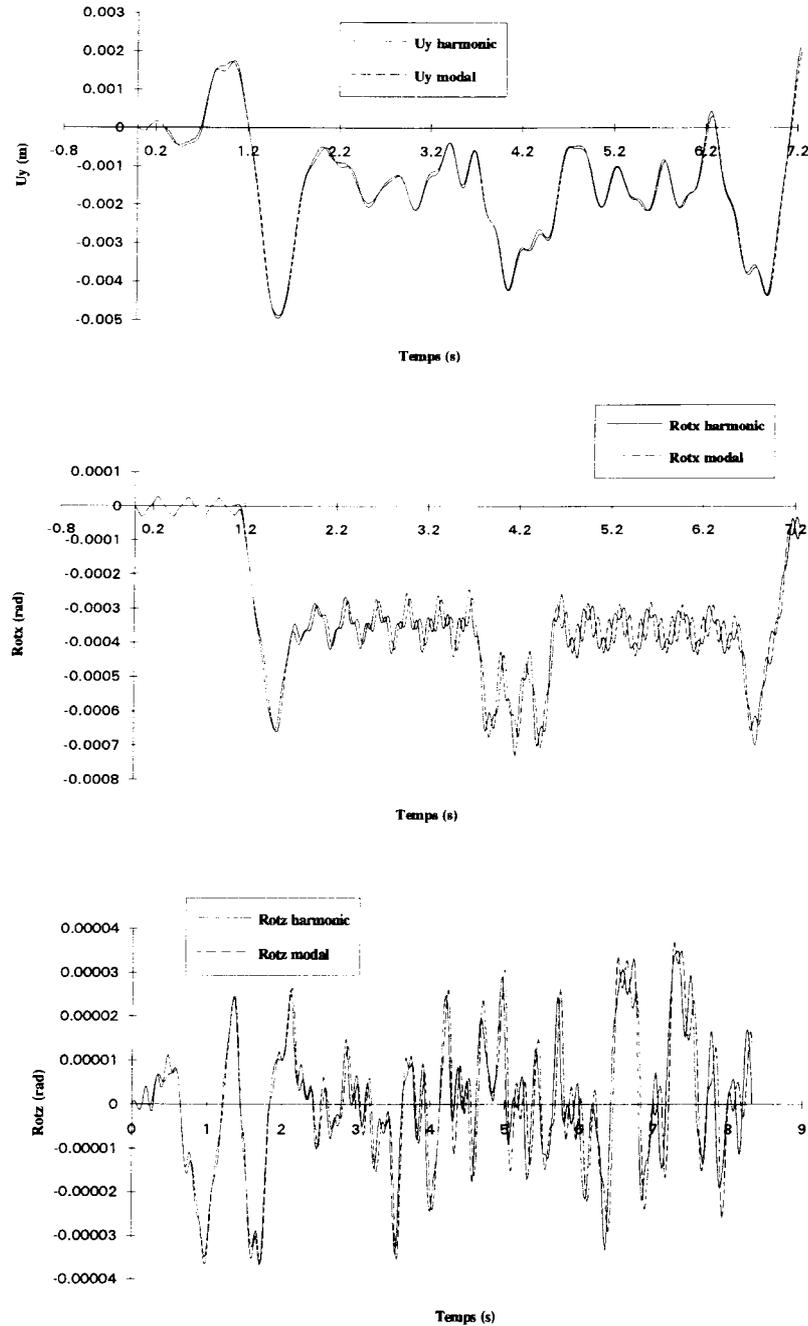


Fig. 9 – Milieu de la travée 3

La comparaison des résultats à 300 km/h montre une très bonne coïncidence des valeurs issues des calculs de type simulation temporelle par superposition modale (modal) et harmonique (harmonic). Les extrêmes sont généralement reconstitués avec une bonne précision.

Le nombre d'harmoniques nécessaires à une bonne reconstitution de la réponse est souvent élevé du fait de la spécificité de la fonction de charges caractérisée par une suite d'impulsions triangulaires de fortes amplitudes. Néanmoins, cette exigence ne grève en aucun cas l'intérêt de la méthode par des temps de calcul prohibitifs puisque cette durée reste inférieure de 60 % au temps qu'il aurait fallu pour effectuer les 50 simulations par superposition modale.

La qualité de la reconstitution et le temps de calcul dépendent de la vitesse et du pas de référence choisis. Plusieurs passages sont généralement nécessaires à l'obtention d'une bonne définition de la réponse d'où l'intérêt d'établir le couple vitesse-pas de référence sur une plage de vitesse réduite (autour de la vitesse de référence).

Il est nécessaire de préciser que l'une des difficultés de ce type de résolution est la reconstitution de la réponse dynamique aux dates correspondantes à un chargement nul. En effet, du fait de leur position par rapport à l'origine, les nœuds sont excités plus ou moins tardivement par la rame, ce qui explique la nullité des charges aux instants correspondants. Dans le cas de la décomposition en série de **Fourier** du chargement, cette dif-

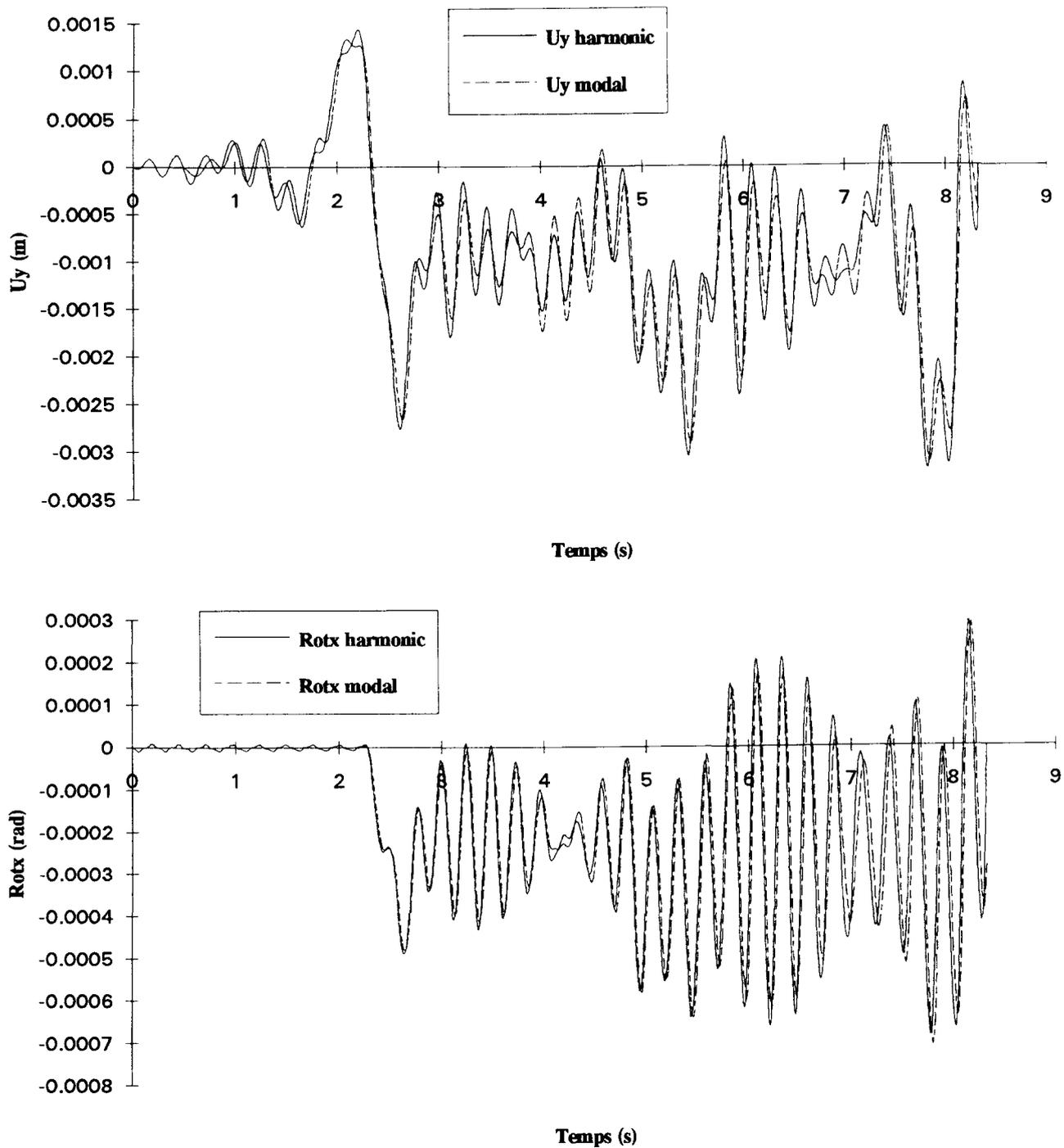


Fig. 10 – Milieu de la travée 5

ficulté peut être surmontée en augmentant suffisamment le nombre d'harmoniques, ce qui se traduit par un lissage progressif de ces zones à chargements nuls. Malgré cette augmentation, la réponse associée aux nœuds les plus éloignés présente quand même dans ces zones un certain nombre d'harmoniques parasites et qui bien sûr ne correspondent pas à la réalité. Néanmoins, ne perd-on pas de vue que le but principal d'une telle méthode est d'obtenir l'enveloppe des déplacements et des accélérations en fonction de la vitesse ce qui conduit à considérer l'influence de ces harmoniques parasites sur les valeurs extrémales comme négligeables.

### 5.3. – Résultats enveloppes

Les enveloppes des déplacements verticaux et des rotations associés aux travées de rives et centrales font apparaître une plus forte sensibilité de l'ouvrage entre 250 et 300 km/h.

Les déplacements verticaux maximaux au centre de la travée 3 sont situés aux vitesses de 205 ( $U_y = 5,7$  mm), 220 (6,2 mm), 265 (5,7 mm) et 280 km/h (5,7 mm). Les deux premières vitesses correspondent au mode de flexion n° 6 (208 km/h) et

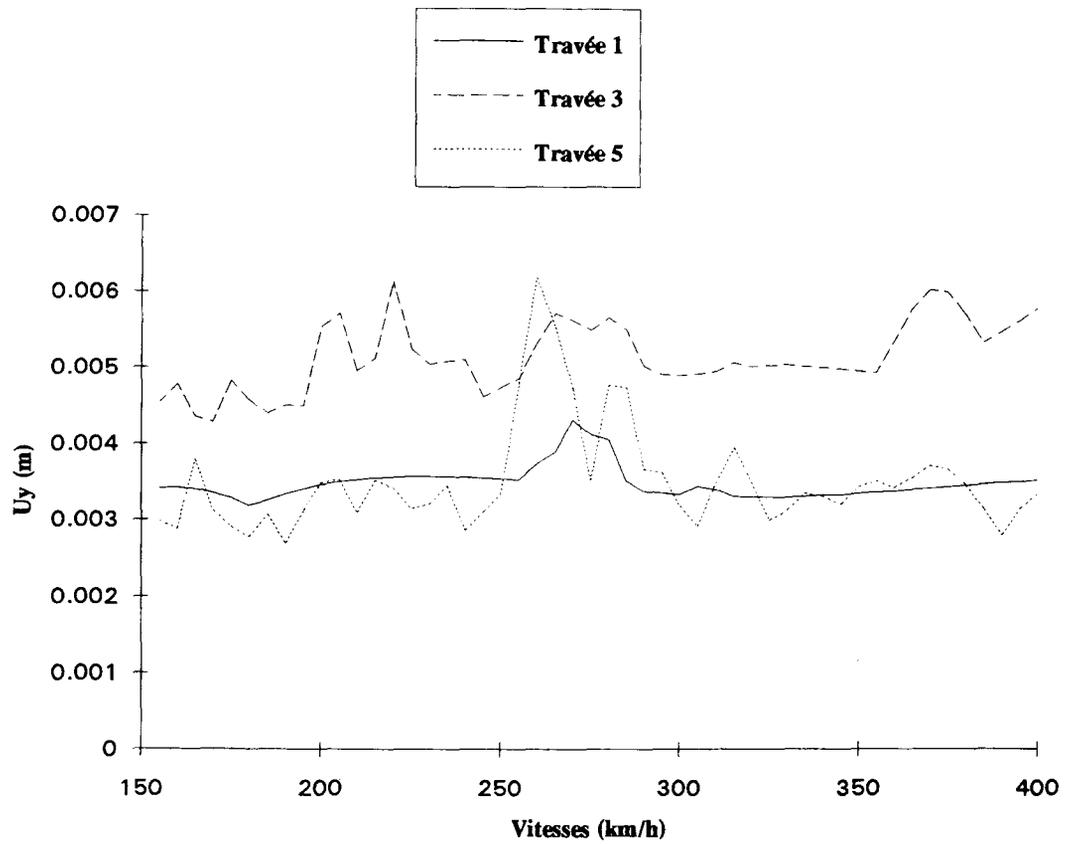
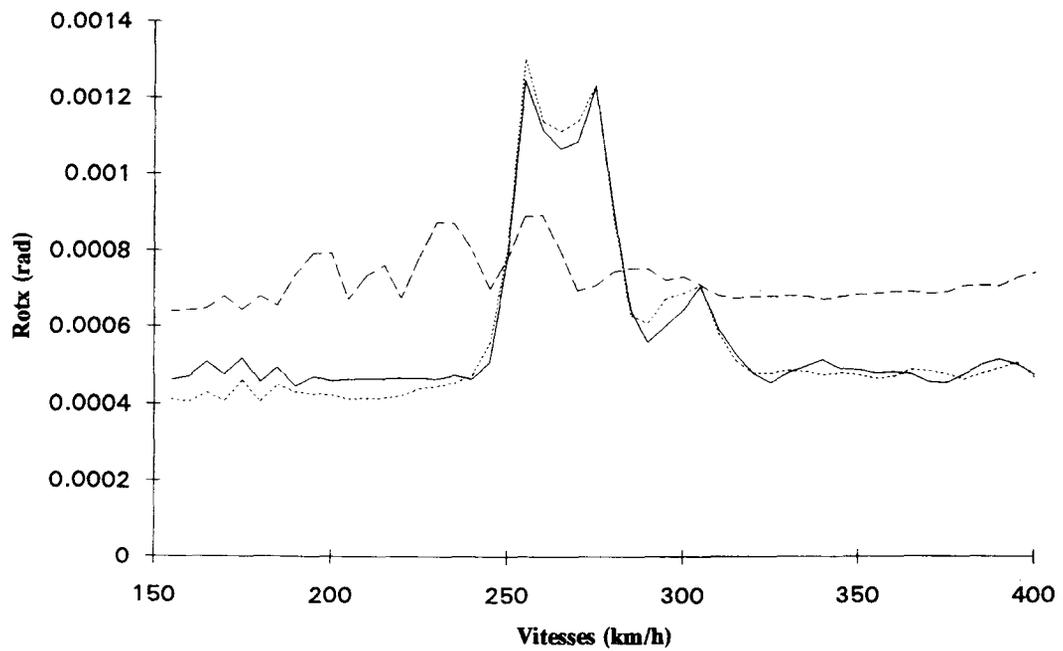
Fig. 11 – Enveloppes des déplacements  $U_y$  en milieu des travées

Fig. 12 – Enveloppes des rotations en milieu des travées

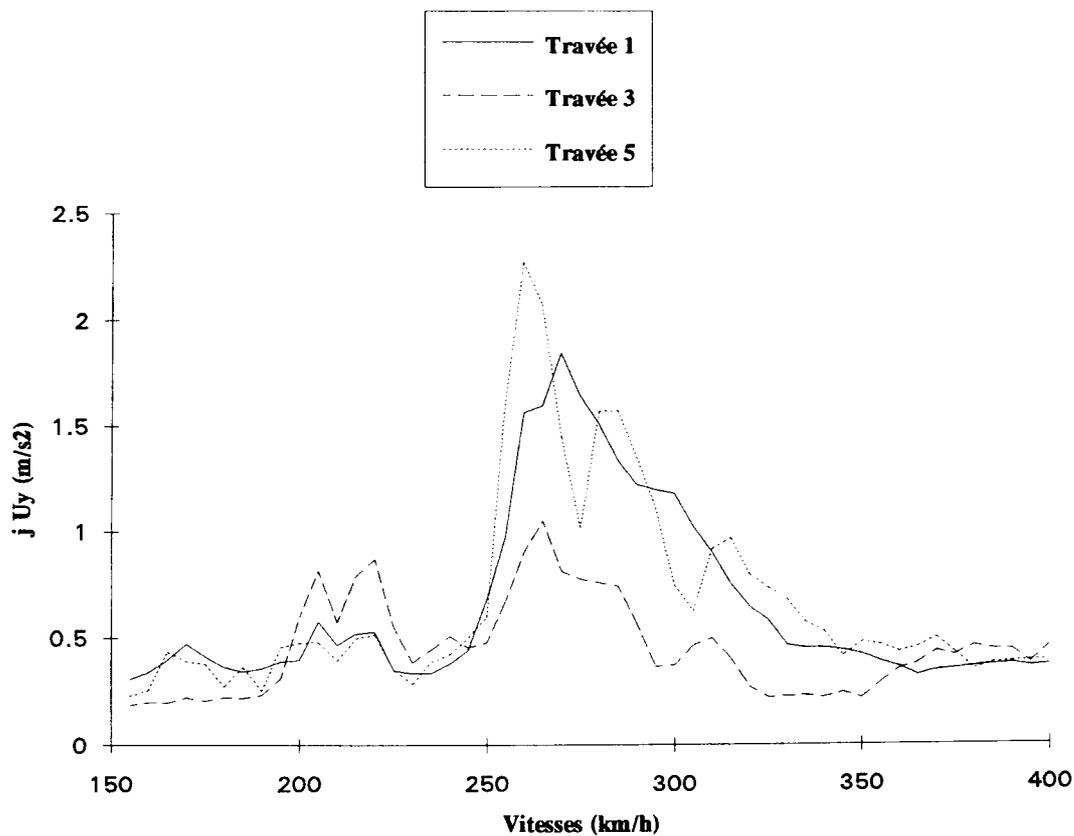


Fig. 13 – Enveloppes des accélérations /Y en milieu des travées

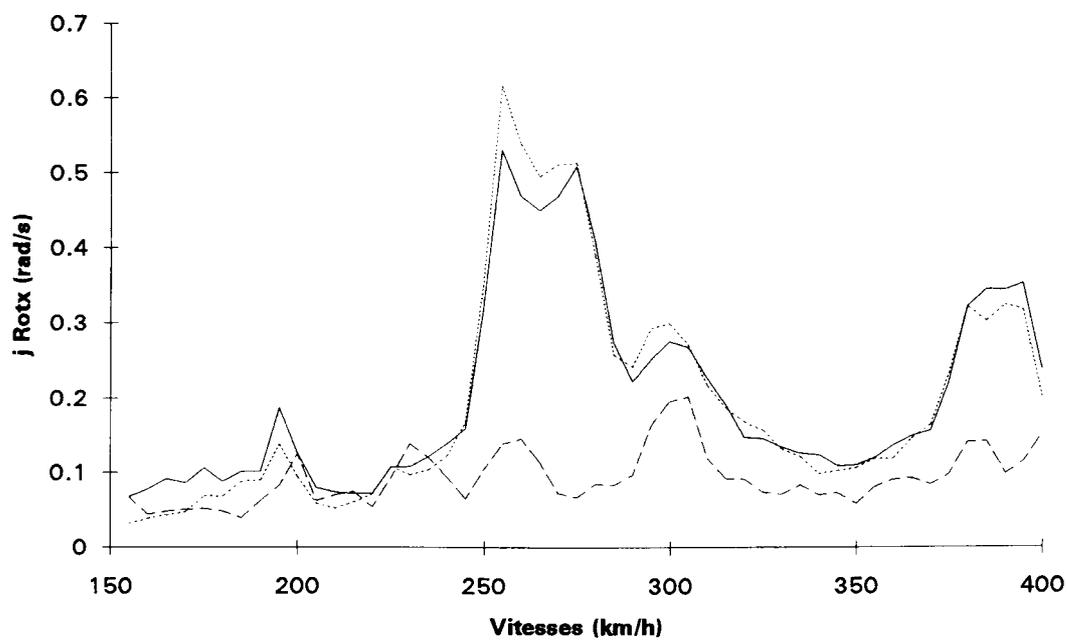


Fig. 14 – Enveloppes des accélérations Rotx en milieu des travées

les deux dernières au mode 10 (267 km/h). Enfin, il est intéressant de remarquer que toutes ces déformations maximales ne sont pas positionnées sur la valeur de la vitesse critique conventionnelle mais sur une valeur légèrement décalée de 5 à 10 km/h. De la même façon, les déplacements au milieu des travées de rives sont localisés aux vitesses de 260 (4,3 mm) et 270 km/h (6,2 mm) alors que le mode correspondant se trouve à 260 km/h.

Les constatations confirment les résultats des études paramétriques évoquées précédemment.

Du fait du positionnement du mode propre de torsion des travées de rives, les rotations associées extrémales se situent bien à 260 km/h (0,0011 rad pour les travées 1 et 5) mais dans le même temps, une valeur supérieure apparaît à 275 km/h (0,0012 rad) ce qui confirme bien le décalage des vitesses évoqué précédemment.

Comme pour les déplacements, un décalage entre la vitesse critique et la vitesse associée à chacun des extréma peut être observé pour les accélérations. Les travées de rives subissent les accélérations les plus fortes (2,26 m/s<sup>2</sup> et 0,62 m/s<sup>2</sup>) pour les composantes verticale et torsionnelle. L'accélération verticale maximale au milieu de la travée 5 est bien située à 260 km/h comme nous l'indique le mode de torsion n° 8 alors que celle de travée 1 est décalée de 10 km/h par rapport à son mode (n° 9). Enfin, les accélérations en torsion ont un comportement tout à fait similaire à celui observé pour les rotations.

## 6. – INTERPRÉTATION ANALYTIQUE

### DES RÉSULTATS

Le décalage, signalé ci-dessus et déjà constaté par le passé, avait amené, entre autres considérations, le Département Ouvrages d'Art de la SNCF (Division VOM) à mettre au point une méthode analytique d'estimation du comportement d'un pont-rail basée sur la décomposition en série de **Fourier** de l'excitation due à un convoi donné.

Par l'utilisation d'un spectre d'excitation fonction continue de la vitesse du convoi, les valeurs extrêmes de paramètres tels que la flèche ou l'accélération à mi-travée, ainsi que les vitesses pour lesquelles elles sont atteintes, sont facilement calculables.

Une telle méthode donne une version plus globale des phénomènes complexes et permet leur interprétation.

Ainsi, le «décalage de vitesse critique conventionnelle» peut s'expliquer de la manière suivante :

Les convois TGV pris en compte dans l'analyse sont constitués de deux rames couplées, chaque rame étant elle-même constituée de deux motrices encadrant 10 voitures. En analysant le spectre d'excitation d'une rame isolée, on s'aperçoit que la densité spectrale maximum correspondant à une valeur de longueur d'onde de 19 m et non de 18,7 m de par la prise en compte des motrices.

Un mode de fréquence  $n_0$  sera donc mis en résonance par un convoi de vitesse  $19 \times n_0$  (en m/s si  $n_0$  est en Hz). La longueur totale d'une rame est de 237,59 m, ce qui correspond à douze fois et demie la longueur d'onde de 19 m. Aussi, la seconde rame sera déphasée exactement d'une demi-phase. Son effet s'opposera à celui de la première, en conséquence le maximum est atteint lors du passage de la première rame à cette vitesse.

Pour des vitesses légèrement supérieures ou inférieures, bien que la première rame n'excite pas l'ouvrage autant qu'elle le

pourrait, le déphasage entre les deux rames étant proche de zéro, les effets des deux rames se cumulent et les valeurs atteintes sont supérieures à celles atteintes avec une seule rame.

Un tel comportement ne peut s'observer que pour des amortissements de l'ouvrage faibles (0,5 % à 1 %) qui permettent au phénomène de se développer de façon significative, alors que des amortissements plus importants (> à 2 %) permettent d'atteindre le régime stationnaire avant que le train n'ait quitté l'ouvrage, ce qui se traduit en fait par une limitation du nombre d'essieux faisant augmenter l'amplitude de la réponse, les autres essieux ne faisant que l'entretenir.

## 7. – CONCLUSIONS

De par la modélisation du chargement dû à un convoi ferroviaire à l'aide de l'analyse de **Fourier**, le logiciel **Harmonie** permet le calcul rapide de la réponse d'un ouvrage à diverses vitesses de circulation.

Il permet ainsi de s'assurer que l'ouvrage étudié répond aux critères que la sécurité des circulations impose, d'autant que l'analyse spectrale confirme que, pour un mode donné, il y a lieu de considérer plusieurs vitesses pour déterminer les réponses extrêmes.

Un complément devrait permettre, à partir de l'analyse de **Fourier** du convoi, de sélectionner *a priori* les vitesses à considérer.

## ANNEXE A – ANALYSE DYNAMIQUE

L'annexe A décrit de façon théorique les techniques de calcul utilisées pour les études dynamiques du comportement des ponts mixtes au passage de trains à grande vitesse.

Bien que ces méthodes soient classiques, elles constituent une base nécessaire à la bonne compréhension de la méthodologie de calcul proposée ici.

### A1. – Formulation de l'équilibre dynamique

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les équations du mouvement à l'instant  $t$  d'un système discret avec amortissement à  $n$  degrés de liberté s'écrivent :

$$[M] \cdot \{ \ddot{q}(t) \} + [C] \cdot \{ \dot{q}(t) \} + [K] \cdot \{ q(t) \} = \{ F(t) \} \quad (A1)$$

avec :

$[M]$  : matrice de masse de la structure  
 $[C]$  : matrice d'amortissement de la structure  
 $[K]$  : matrice de rigidité de la structure.

### A2. – Analyse modale

L'analyse modale caractérise les échanges énergétiques de la structure avec son milieu extérieur, plus couramment appelés vibrations libres de la structure, en l'absence de charges extérieures.

Les modes propres de vibration d'une structure comportant  $n$  degrés de liberté sont obtenus par la recherche des valeurs propres du système précédent sans second membre. L'étude des vibrations libres de la structure sans amortissement évite d'obtenir des solutions complexes et permet donc d'utiliser des méthodes de résolution classiques de type sous-espaces ou Householder. Le système devient alors :

$$[M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [K] \cdot \{q(t)\} = 0. \quad (A2)$$

Les solutions élémentaires étant harmoniques et de la forme  $\{q(t)\} = \{x\} \cdot e^{j\omega t}$ , l'équilibre dynamique devient :

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{x\} = 0 \quad (A3)$$

Pour que ce système d'équations admette des solutions non nulles, il faut que :

$$\det([K] - \omega^2 \cdot [M]) = 0 \quad (A4)$$

d'où :

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_l$  : pulsations propres, solutions de l'équation (A4)

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_l$  : vecteurs propres associés aux pulsations propres précédemment déterminées et définissant les modes propres de vibration libre.

Il est aisé de montrer que tous les modes sont orthogonaux deux à deux. L'ensemble de ces vecteurs propres constitue donc une base modale appelée  $[\phi]$ .

**A3. – Réponse d'un oscillateur simple**

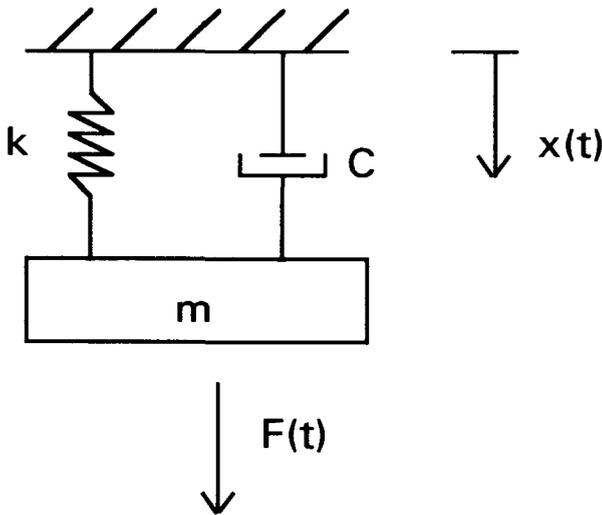


Fig. 15

L'équation qui régit le mouvement de cet oscillateur autour de sa position d'équilibre est la suivante :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) \quad (A5)$$

L'équation caractéristique de (A5) s'écrit :

$$m \cdot r^2 + c \cdot r + k = 0 \quad (A6)$$

Suivant le signe du discriminant de (A6), cet oscillateur est sous-amorti ou sur-amorti.

L'amortissement critique  $c_c = 2 \sqrt{k \cdot m}$  correspond à un discriminant nul. Bien évidemment, cet amortissement est de type visqueux conformément à la pratique usuelle.

En posant :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} ; \quad \xi = \frac{c}{c_c}$$

d'où :

$$c = 2 \cdot m \cdot \phi \cdot \omega$$

l'équation (A5) devient :

$$\ddot{x}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = F(t)/m \quad (A7)$$

Cette équation peut être intégrée par la méthode des transformées de Laplace dont la solution s'exprime sous la forme d'une intégrale plus souvent appelée en dynamique « Intégrale de Duhamel » (ou produit de convolution). Cette équation doit respecter les conditions initiales.

Si les conditions initiales (déplacement et vitesse) sont fixées à l'instant  $t_0$ , la réponse de l'oscillateur s'exprime sous la forme :

$$x(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_d} \cdot \int_{t_0}^t F(\tau) \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot (t-\tau)} \cdot \sin(\omega_d \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau \quad (A8)$$

dont la partie transitoire s'écrit :

$$x_i(t) = e^{-\xi \omega t} \cdot (k_1 \cdot \cos(\omega_d t) + k_2 \cdot \sin(\omega_d t)) \quad (A9)$$

avec :

$$\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

$k_1, k_2$  : constantes dépendant des conditions initiales.

**A4. – Méthode de calcul par superposition modale**

Les déplacements nodaux de la structure dans son repère global sont donnés par le changement de base suivant :

$$\{q(t)\} = [\phi] \cdot \{y(t)\} \quad (A10)$$

où  $\{y(t)\}$  est le vecteur des composantes du déplacement dans la base modale et  $[\phi]$  la matrice des vecteurs propres obtenue par la résolution de :

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{x\} = 0 \quad (A11)$$

avec  $[\phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_l]$   $\ell$  degrés de libertés (ou modes).

Note : les méthodes de détermination des valeurs propres intégrées dans les codes de calculs tel que Ansys permettent généralement d'extraire un nombre limité de modes (inférieur ou égal au nombre de degrés de liberté). C'est donc à l'utilisateur d'évaluer la pertinence du nombre de modes choisi. Si celui-ci est inférieur au nombre de degrés de liberté, la matrice  $[\phi]$  n'est plus carrée.

À partir de l'équation de l'équilibre dynamique (A1) et du changement de base (A10), la multiplication des termes de masse, d'amortissement et de rigidité par  $\phi_i^T$  permet d'obtenir la relation suivante :

$$\phi_i^T \cdot [M] \cdot [\phi] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + \phi_i^T \cdot [C] \cdot [\phi] \cdot \{\dot{y}(t)\} + \phi_i^T \cdot [K] \cdot [\phi] \cdot \{y(t)\} = \phi_i^T \cdot \{F(t)\} \quad (A12)$$

Les propriétés d'orthogonalité des modes permettent d'écrire :

$$\phi_i^T \cdot [M] \cdot \phi_j = 0$$

si  $i \neq j$  :

$$\phi_i^T \cdot [K] \cdot \phi_j = 0$$

Grâce à cette propriété, les matrices généralisées de masse et de rigidité deviennent diagonales. Afin de simplifier le problème, il est d'usage de faire l'hypothèse que la matrice d'amortissement  $[C]$  devient également diagonale.

L'équation (A12) s'exprime alors :

$$[m] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + [c] \cdot \{\dot{y}(t)\} + [k] \cdot \{y(t)\} = \{p(t)\} \quad (\text{A13})$$

Les matrices  $[m]$ ,  $[c]$  et  $[k]$  sont des matrices diagonales dont les termes sont donnés par :

$$k_i = \phi_i^T \cdot [K] \cdot \phi_i ; \quad m_i = \phi_i^T \cdot [M] \cdot \phi_i$$

$$c_i = \phi_i^T \cdot [C] \cdot \phi_i ; \quad p_i(t) = \phi_i^T \cdot \{F(t)\}$$

Le système se réduit alors à un système de  $l$  équations différentielles du 2<sup>ème</sup> ordre se comportant comme  $l$  oscillateurs simples indépendants (cf. chapitre A3). Dans la pratique, chaque équation peut être intégrée à l'aide de l'intégrale de Duhamel sous forme d'intégration numérique, mais il est envisageable d'utiliser une autre méthode d'intégration dans certains cas spécifiques.

$$\ddot{y}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 \cdot y_i(t) = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad (\text{A14})$$

$$y_i(t) = \frac{1}{m_i \cdot \omega_{di}} \cdot \int_0^t p_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)} \cdot \sin(\omega_{di} \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau \quad (\text{A15})$$

avec  $\omega_{di} = \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}$

Une fois les déplacements  $\{y(t)\}$  déterminés, il suffit d'injecter ces valeurs dans (A10) pour obtenir les déplacements  $\{q(t)\}$  exprimés dans le repère initial de la structure.

Les forces élastiques seront calculées à partir de la relation de rigidité (A16) qui lie forces et déplacements. Néanmoins, il sera plus simple d'exprimer cette relation sous la forme (A17) suivante :

$$\{f_s(t)\} = [K] \cdot \{q(t)\} = [K] \cdot [\phi] \cdot \{y(t)\} \quad (\text{A16})$$

D'après (A11),  $[K] \cdot [\phi] = [\omega]^2 \cdot [M] \cdot [\phi]$

Soit  $\{f_s(t)\} = [M] \cdot [\phi] \cdot [\omega]^2 \cdot \{y(t)\} \quad (\text{A17})$

### A5. - Analyse Harmonique

Considérant une fonction temporelle de chargement de la forme  $\{F(t)\} = \{F_{max} \cdot e^{i\varphi}\} \cdot e^{i\Omega \cdot t}$ , l'équation de l'équilibre dynamique (A1) s'écrit alors :

$$[M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{q}(t)\} + [K] \cdot \{q(t)\} = \{F(t)\} = \{F_{max} \cdot e^{i\varphi}\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} \quad (\text{A18})$$

avec  $t$  : temps (s)

$i$  : partie imaginaire =  $\sqrt{-1}$

$\Omega$  : pulsation de l'excitation (=  $2\pi f$ ) en rad/s

$\varphi$  : phase (rad).

Sous la forme complexe  $\{F(t)\}$  s'exprime comme suit :

$$\{F(t)\} = \{F_{max} \cdot e^{i\varphi}\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} = \{F_{max} \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} = \{F_1 + iF_2\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} \quad (\text{A19})$$

Sachant que le champ de déplacement est nécessairement harmonique et de pulsation  $\Omega$ ,  $\{q(t)\}$  s'écrit alors :

$$\{q(t)\} = \{q_{max} \cdot e^{i\varphi}\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} = \{q_{max} \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} = \{q_1 + iq_2\} \cdot e^{i\Omega \cdot t} \quad (\text{A20})$$

d'où :

$$([K] - \Omega^2 \cdot [M] + i\Omega \cdot [C]) \cdot (\{q_1\} + i \cdot \{q_2\}) = \{F_1\} + i \cdot \{F_2\} \quad (\text{A21})$$

Reprenant le principe de la méthode de superposition modale, l'équation (A21) est diagonalisée en effectuant le changement de base (A10) et en multipliant le système par  $\{\phi\}^T$ . L'équation (A21) devient :

$$([k] - \Omega^2 \cdot [m] + i\Omega \cdot [c]) \cdot (\{y_1\} + i \cdot \{y_2\}) = \{\phi\}^T \cdot (\{F_1\} + i \cdot \{F_2\}) \quad (\text{A22})$$

$$([k] - \Omega^2 \cdot [m] + i\Omega \cdot [c]) \cdot (\{y\}) = (\{f\}) \quad (\text{A23})$$

et se résume alors à la résolution d'un système de  $l$  oscillateurs harmoniques dont la solution est donnée par :

$$\left( y_j = \frac{f_j}{(\omega_j - \Omega)^2 + i(2\omega_j \Omega \xi_j)} \right)_{j=1, l \text{ modes}} \quad (\text{A24})$$