



THESE  
Présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR  
DE  
L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : Structures et Matériaux  
Présentée par

**Laurent RICCI**

Sujet de la thèse :

**MODELISATIONS DISCRETES ET CONTINUES  
DES VOIES FERREES BALLASTEES**

Soutenue le 18 décembre 2006  
Devant le jury composé de :

Président : F.RADJAI  
Rapporteurs : D.CLOUTEAU  
M.ICHCHOU  
Examineurs : D.DUHAMEL  
L.SCHMITT  
Directeur de thèse : K.SAB

# Modélisations discrètes et continues de la voie ferrée ballastée

Thèse de doctorat de L. Ricci<sup>(a,b)</sup> sous la direction de K.Sab<sup>(a)</sup>

<sup>a</sup> Institut Navier-Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification (LCPC/ENPC)

<sup>b</sup> Direction de la Recherche et de la Technologie (SNCF)

17 décembre 2006



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>I</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>La voie ferrée</b>	<b>17</b>
2.1	Description de la voie ferrée . . . . .	17
2.1.1	La voie . . . . .	17
2.1.2	Le rail . . . . .	17
2.1.3	La traverse . . . . .	17
2.1.4	Le ballast . . . . .	18
2.1.5	Les structures d'assise . . . . .	19
2.2	Vie de la voie . . . . .	20
2.2.1	Description des défauts de la voie . . . . .	20
2.2.2	Seuils d'intervention pour les lignes à grande vitesse . . . . .	21
2.2.3	Opérations de maintenance . . . . .	22
2.3	Conclusion du chapitre . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Observations expérimentales</b>	<b>23</b>
3.1	Les règles de similitude . . . . .	23
3.1.1	Conservation du champ des contraintes . . . . .	24
3.1.2	Conservation du champ d'accélération . . . . .	24
3.2	Dispositifs expérimentaux d'observation d'une voie ferrée . . . . .	25
3.2.1	Observations in-situ . . . . .	25
3.2.2	Banc d'essai à échelle réelle . . . . .	25
3.2.3	Banc d'essai à échelle un tiers . . . . .	28
3.2.3.1	Essai MICROBALLAST . . . . .	28
3.2.3.2	Essai BETTER . . . . .	30
3.2.3.3	Description générale de l'essai BESTT ([4]) . . . . .	31
3.3	Conclusion du chapitre . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modélisations : modèles de comportement et effets dynamiques</b>	<b>35</b>
4.1	Modèles continus de la voie ferrée . . . . .	35

4.1.1	Méthodes de résolution . . . . .	38
4.2	Méthode des éléments discrets . . . . .	40
4.3	Charge mobile et dynamique des structures . . . . .	43
4.4	Conclusion . . . . .	45
<b>II</b>	<b>Etudes semi-analytiques 1D et 3D</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Construction d'un modèle 1D mixte discret-continu</b>	<b>53</b>
5.1	Introduction . . . . .	53
5.2	Modèle continu/continu . . . . .	53
5.2.1	Position du problème . . . . .	54
5.2.2	Recherche des équations . . . . .	54
5.2.2.1	Rappel des équations classiques de la mécanique . . . . .	54
5.2.2.2	Etude de la couche supérieure . . . . .	56
5.2.2.3	Couche inférieure . . . . .	57
5.2.2.4	Conditions aux limites . . . . .	57
5.2.3	Résolution . . . . .	58
5.3	Modèle discret/continu 1D . . . . .	59
5.3.1	Position du problème . . . . .	59
5.3.2	Etude de la couche supérieure discrète . . . . .	61
5.3.3	Etude de la couche inférieure continue . . . . .	61
5.3.4	Identification des paramètres discrets $k$ et $M$ . . . . .	62
5.3.5	Etude des équations de dispersion . . . . .	63
5.3.6	Recherche et comparaison des fréquences propres entre les approches discrète et continue . . . . .	64
5.3.6.1	Milieu continu . . . . .	65
5.3.6.2	Milieu discret . . . . .	65
5.3.7	Résolution dans le cas d'une sollicitation sinusoïdale pour le bicouche discret/continu . . . . .	68
5.3.8	Couche continue . . . . .	68
5.3.9	Couche discrète . . . . .	70
5.4	Résultats : comparaison entre les bicouches mixte discret/continu et continu/continu	71
5.4.1	Convergence de l'approche discret/continu vers l'approche continu/continu	71
5.4.2	Influence de la différence des rigidités et de la fréquence de la sollicitation . . . . .	72
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Approche 3D d'un bicouche linéaire mixte discret/continu</b>	<b>75</b>
6.1	Introduction . . . . .	75
6.2	Présentation du problème . . . . .	75
6.2.1	Description du modèle . . . . .	75

6.2.2	Modélisation du ballast . . . . .	76
6.2.3	Equations du mouvement . . . . .	78
6.2.3.1	La couche discrète . . . . .	78
6.2.3.2	Equations dans le milieu continu . . . . .	78
6.2.3.3	Les conditions aux limites . . . . .	79
6.2.4	Identification des paramètres du modèle discret . . . . .	80
6.3	Résolution . . . . .	81
6.3.1	La sous-couche continue . . . . .	81
6.3.2	La couche discrète . . . . .	82
6.3.3	Conditions aux limites . . . . .	84
6.3.4	Illustration sur un cas simple 1D de la première zone de Brillouin . . . . .	85
6.4	Résultats numériques . . . . .	86
6.4.1	Demi-espace discret soumis à une charge ponctuelle . . . . .	86
6.4.2	Etude d'un bicouche discret/continu sous l'action d'une charge ponctuelle . . . . .	88
6.4.3	Un bicouche mixte discret/continu soumis à une charge en M . . . . .	90
6.5	Conclusions . . . . .	92

### **III Etudes linéaires et non-linéaires par éléments finis 97**

<b>7</b>	<b>Construction de modèles continus et discrets par éléments finis : approches linéaires et non linéaires</b>	<b>101</b>
7.1	Introduction . . . . .	101
7.2	Algorithmes de résolution des équations issues des éléments finis . . . . .	102
7.2.1	Problèmes stationnaires . . . . .	102
7.2.2	Problèmes non-stationnaires . . . . .	104
7.3	Discrétisation d'un problème d'élastodynamique linéaire continu . . . . .	106
7.3.1	Méthode variationnelle . . . . .	106
7.3.2	Construction d'une fonction d'interpolation pour des éléments hexaédriques (de la forme d'un parallélépipède rectangle, "MTH8" dans la nomenclature du code CESAR-LCPC) . . . . .	107
7.3.3	Passage des fonctions d'interpolation à la matrice d'interpolation . . . . .	108
7.4	Construction de la matrice de rigidité d'un élément discret linéaire BL8 . . . . .	110
7.4.1	Expression de l'énergie du cube BL8 . . . . .	110
7.4.2	Construction de la matrice de rigidité . . . . .	111
7.5	Construction de la matrice de rigidité dans les cas unilatéraux pour des interactions linéaires ou non . . . . .	113
7.5.1	Pourquoi faut-il construire des modèles unilatéraux éventuellement non-linéaires? . . . . .	113
7.5.2	Expression des dérivées de l'énergie potentielle . . . . .	115
7.6	Cas discret non linéaire et/ou unilatéral pour un hexaèdre à huit noeuds (BNL8)	116

7.6.1	Introduction . . . . .	116
7.6.2	Construction des lois de comportement discrètes . . . . .	117
7.6.3	Introduction au niveau local d'une non-linéarité polynomiale de degré deux . . . . .	118
7.6.4	Effets sans-tension : critères et utilisation . . . . .	120
7.7	Amortissement numérique . . . . .	121
7.7.1	Couche absorbante dans CESAR[54] . . . . .	121
7.7.2	Formule d'amortissement proportionnel utilisée dans le code élément finis CESAR . . . . .	121
7.8	Conclusions . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Eléments de validation et de comparaison de modèles numériques</b>	<b>123</b>
8.1	Comparaison des différents modèles avec la solution analytique de Boussinesq	123
8.1.1	Rappels sur le problème et la solution de Boussinesq pour une charge fixe ponctuelle . . . . .	123
8.1.2	Présentation du maillage pour les modèles numériques, effet de la taille du maillage . . . . .	124
8.1.3	Comparaisons entre la solution de Boussinesq et les modèles introduits dans CESAR-LCPC . . . . .	125
8.2	Comparaison des différents modèles entre eux sur une expérience pseudo-oedométrique . . . . .	129
8.2.1	Présentation du maillage pour les modèles numériques . . . . .	129
8.2.2	Comparaisons des modèles . . . . .	130
8.3	Conclusions . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Application ferroviaire : cas du banc d'essai à échelle un tiers</b>	<b>133</b>
9.1	Introduction . . . . .	133
9.2	Le banc d'essai à échelle un tiers BESTT [4] . . . . .	134
9.2.1	Description, conception . . . . .	134
9.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	137
9.3	Coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers : cas pseudo 2D . . . . .	140
9.3.1	Présentation du maillage . . . . .	142
9.3.2	Cas statique linéaire . . . . .	143
9.3.3	Comparaison des signaux entre le cas pseudo 2D et la modélisation complète du banc pour une sollicitation sur un seul vérin . . . . .	143
9.3.4	Conclusions-bilan . . . . .	147
9.4	Section pseudo-2D longitudinale . . . . .	148
9.4.1	Présentation du maillage . . . . .	149
9.4.2	Etude statique . . . . .	149
9.4.3	Dynamique du banc d'essai à échelle un tiers : coupe longitudinale avec un chargement immobile oscillant sur le blochet central . . . . .	152

9.4.4	Coupe longitudinale avec un chargement mobile variable sur les trois traverses . . . . .	156
9.4.5	Conclusion partielle . . . . .	159
<b>10</b>	<b>Conclusion générale et éléments de perspectives</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Résoudre une équation de degré 3</b>	<b>173</b>
<b>B</b>	<b>Recherche des directions de propagation d'ondes</b>	<b>175</b>
<b>C</b>	<b>Force discrète équivalente</b>	<b>177</b>
C.1	Cas d'une charge ponctuelle . . . . .	177
C.1.1	Cas 2D . . . . .	177
C.1.2	Cas 3D d'une force ponctuelle se déplaçant parallèlement aux alignements de granulats . . . . .	178
C.2	Cas d'une force répartie . . . . .	180
C.2.1	Cas 2D . . . . .	180
C.2.1.1	Exemple 1 : force de gravitationnelle . . . . .	181
C.2.1.2	Exemple 2 : force gaussienne . . . . .	181
C.2.2	Cas 3D . . . . .	183
C.3	Conclusions . . . . .	183

## Résumé

Devant la dégradation plus rapide que prévue des voies ferrées ballastées aux grandes vitesses, la SNCF a engagé des recherches sur la modélisation de la voie, et a lancé des expérimentations en collaboration avec le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

L'objectif des deux thèses menées au LAMI (ENPC/LCPC) ces quatre dernières années était de pouvoir indiquer, en fonction de la vitesse et de la nature du sol, le tassement associé de la voie ferrée ballastée. Le travail s'est divisé en deux parties : la première ([4]), consistait à rechercher une loi de tassement expérimentale en fonction de l'accélération présente dans le voie ; la seconde (notre thèse) avait pour but d'élaborer un modèle de voie permettant, en fonction de données sur la vitesse et de la nature du sol, de donner la valeur de l'accélération verticale maximale.

Nous avons donc développé des approches dynamiques semi-analytiques linéaires multicouches, des approches numériques linéaires ou non (méthode des éléments finis, développements dans le code CESAR-LCPC), discrètes et continues. En comparant leurs résultats aux mesures expérimentales, on a pu sélectionner les lois de comportement les plus adaptées, et le modèle de voie idoine de voie ferrée.

**Mots-clés :** vibration du ballast, modèle discret/continu, comportement dynamique de la voie, transformée de Fourier, charge mobile, méthode des éléments finis, modélisation non-linéaire.



# Remerciements

Ce travail de thèse s’inscrit dans le cadre des travaux numériques et expérimentaux menés au Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification sur les voies ferrées à grande vitesse, sous la direction de Karam Sab, professeur de l’ENPC. C’est d’ailleurs à lui que s’adresse ma reconnaissance pour sa patience et ses conseils avisés.

Denis Duhamel, professeur de l’ENPC, Vu Hieu Nguyen et Pierre Humbert, directeur de recherches du LCPC m’ont également aidé à appréhender le “numérique”, et ont accompagné ma prise en main des langages C++ et fortran en vue de la programmation dans le code éléments finis CESAR-LCPC. Merci à eux !

Ma gratitude teintée de soulagement va également aux membres de mon jury, exigeant et bienveillant à la fois. Il s’agissait, outre Karam et Denis, de Didier Clouteau, professeur de l’Ecole Centrale Paris, de Franck Radjaï, directeur de recherche CNRS, de Mohamed Ichchou, maître de conférences de l’Ecole Centrale Lyon, et de Laurent Schmitt, de la SNCF. Leur grande connaissance de la voie ferrée, de son entretien et de ses modélisations leur a inspiré nombre de questions et de remarques riches d’enseignements.

Mes “colloc” de bureau successifs (Yahia, Minh, et Ali), Marie-Françoise alias Marie, Saskia, Karim, Daniella, Stefano, l’ensemble des doctorants, des personnels de recherche, techniques ou administratifs ont contribué à cette ambiance studieuse et cordiale à la fois.

Durant mes années studieuses, depuis mon DEA, j’ai eu l’honneur de représenter pendant trois ans les étudiants de doctorat, de MBA, de DEA, de mastères spécialisés, aux différents conseils de l’ENPC (conseils d’administration, d’enseignement et de recherche, et du département des formations doctorales). Je me suis beaucoup attaché à cette école. Dans ces conseils, j’ai rencontré des gens intéressants, j’ai appris à négocier, communiquer et à intervenir en public. C’est une expérience que je conseille à tous les étudiants qui désirent s’insérer dans un milieu professionnel à l’issue de leurs études. Des formations complémentaires comme les doctorales m’ont été proposées notamment par Sophie Cambon, pierre angulaire de la formation professionnelle des doctorants et de leur insertion professionnelle.

Grâce à ce mémoire de thèse, je peux saluer le président du conseil d’administration François Roussely, les directeurs de l’ENPC Philippe Courtier et Pierre Veltz qui m’ont toujours accordé une grande écoute lors des conseils. J’adresse également mon bon souvenir à l’ensemble des personnels de l’ENPC, et en particulier Marine, Claude, Alice, et Lydie.

Au LCPC, je veux remercier Jacques Roudier, le directeur général, et Rémi Pochat, le directeur scientifique. Ils m’ont toujours encouragé. Je les apprécie beaucoup. J’ai toujours une affection particulière pour ce prestigieux laboratoire.

Merci également à mes étudiants de l’université de Marne La Vallée. Je me suis attaché à eux, et ce qui me touche, c’est que ces derniers me saluent lorsque j’ai l’occasion de les croiser. J’espère leur avoir permis de mieux comprendre les mathématiques appliquées, le génie civil, la mécanique, les échanges d’énergie et la programmation. Merci également à mes anciens

collègues de l'université.

Si j'ai pu venir faire ma troisième année de l'ENTPE à l'ENPC, c'est grâce à :

- Jean-Marc Malasoma, brillant mathématicien et physicien des phénomènes chaotiques et non-linéaires, qui m'a soutenu lorsque j'ai voulu faire en même temps que mes cours à l'ENTPE successivement une licence puis une maîtrise de physique ;
- François Perdrizet, ingénieur général des Ponts et Chaussées alors directeur de l'ENTPE, qui a permis ce cursus original et qui m'a recruté par la suite à la direction de la recherche du ministère de l'Équipement (la DRAST) en tant que conseiller scientifique auprès de lui, quand il était directeur de la DRAST ;
- Yves Mouton, ancien directeur scientifique adjoint du LCPC qui m'avait repéré dans l'un de ses cours à l'ENTPE et qui a appuyé mon projet de troisième année à l'ENPC en même temps qu'un DEA de mécanique de Paris 6 ;
- Alain Ehrlicher, président du département Génie Mécanique et Matériaux de l'ENPC, qui m'a accueilli lors de ce montage à l'intérieur de son département.

Je tiens à remercier particulièrement mon professeur de physique de seconde, M. Guy Taliario, normalien, qui a beaucoup compté dans mon orientation et dans mon goût pour la physique et pour la science en général. J'ai eu énormément de plaisir à le recontacter dernièrement pour le mettre au courant de la fin de mon cursus scolaire et universitaire, et surtout à ce qu'il se souvienne encore de moi.

Enfin, j'ai une pensée émue pour mes grands-parents disparus (Renée, Cosimo et Emile) qui auraient été très heureux de mon succès. Ils ont beaucoup compté pour moi.

Je remercie également mon "fan club" actuel composé de Josette, ma grand-mère, d'Alain, mon frère qui deviendra un éminent journaliste je suis sûr, de Sylvie, ma petite amie, et mes parents Annie et Marcel. Je les remercie bien sûr de leur soutien indéfectible aussi bien moral au cours de mon cursus, que "logistique". Merci à eux d'être venus assister à ma soutenance, c'était important.

Merci à tous les autres que j'ai cotoyé et que, hélas, je n'ai pu citer.

# Chapitre 1

## Introduction générale

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre le LCPC<sup>1</sup> et la SNCF<sup>2</sup>. Depuis plus de dix ans, plusieurs études ont été menées par les unités de recherche du LCPC avec la SNCF en vue de l'étude et de la prévision du tassement des voies ferrées ballastées. En effet, le développement croissant des lignes à grande vitesse pose de nouveaux problèmes tant pour le dimensionnement que pour la maintenance. Par exemple, la ligne à grande vitesse (LGV) Paris-Lyon avait été dimensionnée pour 25 ans : le renouvellement complet de la voie est intervenu au bout seulement de 15 ans. D'ailleurs, la maintenance des lignes à grande vitesse (LGV) montre en effet des problèmes spécifiques qui n'existent que très peu sur les lignes classiques : éjections de grains et tassements différentiels importants.

Au LAMI, le tassement du ballast a été étudié pour la première fois par N.Guérin en 1996 sur un banc d'essai à échelle réduite, appelé essai MICROBALLAST[33]. Elle a proposé une loi de tassement expérimentale qui relie le tassement (déformation permanente) à la déflexion (déformation élastique) par le biais d'une relation de puissance. Les valeurs de cette loi n'ont pas été retrouvées par des essais in situ, mais le lien entre le tassement et la déflexion a été validé. Toujours avec un banc d'essai à échelle réduite baptisé BETTER<sup>3</sup>, V.Bodin[14] a mis en évidence une loi de tassement réaliste vis à vis des ordres de grandeur mesurés in situ. Par sa démarche, elle a montré que le tassement dans le ballast était dû en très grande majorité aux phénomènes vibratoires (vibrations et réarrangements de grains), et dans une moindre mesure à l'usure des grains. En augmentant la fréquence de sollicitation, une accélération "critique" au-delà de laquelle le tassement devient extrêmement important est apparue. En surface, les grains de ballast "se mettent à bouillir ou à sauter"[14]. Toutes satisfaisantes qu'elles soient, les observations et lois exprimées par V.Bodin étaient limitées par le dispositif expérimental. En effet, le banc BETTER simulait le passage d'un train à l'aide d'un vérin, et sur une couche de ballast reposant sur un élastomère. Afin de déterminer l'influence du déplacement de la charge, de même que pour simuler une voie ferrée réaliste avec plusieurs couches de matériaux, des essais ont été faits par A.A.Shaer[4] au LAMI sur un nouveau banc d'essai à échelle un tiers (BESTT<sup>4</sup>).

Quels que soient les résultats et leur intérêt, l'étude des voies ferrées ne peut se limiter à une étude expérimentale : une interprétation à l'aide de modèles théoriques et numériques a d'ailleurs été effectuée.

---

<sup>1</sup>Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

<sup>2</sup>Société Nationale des Chemins de Fer

<sup>3</sup>Ballast : Essai de Tassement Transversal à Echelle Réduite

<sup>4</sup>Ballast Essai Sur Trois Traverses

Parmi les modèles appliqués à la voie ferrée, les modèles linéaires continus sont fréquemment utilisés : que ce soit pour des cas 1D [14, 31], 2D[55], ou 3D[43]. En raison de leur simplicité, et de résultats relativement satisfaisants suivant les cas, le cas 1D (poutres de Winkler, de Timoshenko...) est très étudié [31], car des résultats analytiques existent beaucoup plus souvent qu'avec des modèles à plusieurs dimensions. En 2D ou 3D, les modèles linéaires élastiques [10, 11] peuvent être résolus par des approches semi-analytiques dans certains cas.

Pour les géométries de structure complexes (comme a pu l'être le banc BESTT), et pour les comportements non-linéaires, on utilise habituellement la méthode des éléments finis [29]. Dans les cas linéaires traités par éléments finis, la méthode de superposition modale ou les procédures d'intégration numérique sont usuellement employées. Pour les cas non-linéaires, seules les procédures numériques (Newmark, Wilson...) demeurent possibles. C'est d'ailleurs la méthode de Newmark que nous avons utilisée dans cette thèse. Afin de simuler le caractère discret des grains de ballast, V.H.Nguyen a construit des éléments finis unilatéraux. Cela signifie qu'il y aura une interaction non nulle entre les grains de ballast que lorsqu'ils seront en compression. On utilisera cette méthode dans la partie 3 de cette thèse.

Le fait de considérer comme continu un milieu aussi granulaire que le ballast peut susciter des questions, surtout si l'on considère le faible nombre de couches de grains dans la direction verticale contenues dans une épaisseur de ballast.

Des méthodes d'éléments discrets (MED)[59, 69] qui tiennent compte des interactions entre grains sont développées : elles utilisent des algorithmes qui considèrent les grains comme indépendants les uns des autres. La SNCF dispose de deux logiciels en 2D (grains polygonaux) : un logiciel basé sur la méthode de la dynamique moléculaire qui a été développé par X.Oviedo et K.Sab et un logiciel basé sur la méthode de la dynamique des contacts a été développée notamment par J.J.Moreau du LMGC. De plus, la SNCF et le LMGC ont abouti à l'extension du logiciel du LMGC vers une géométrie granulaire polyédrique 3D. Deux difficultés principales surviennent pour ces méthodes d'éléments discrets : d'une part la détection des contacts (intervient sur le découpage temporel), et d'autre part l'adaptation à des structures complexes. Pour s'affranchir du problème de la détection des contacts, A.S.J.Suiker et al.[79, 80] ont proposé un modèle 2D dans lequel les grains (de ballast par exemple) étaient dans un réseau de masses-ressorts reposant sur un sol infiniment rigide sous l'action d'une masse ponctuelle. Avec une approche semi-analytique, ce modèle a prédit des différences significatives avec les modèles élastiques continus. Compte tenu de cette simplicité, et de résultats mettant en valeur le caractère discret des grains de ballast, une partie de la méthodologie développée dans ce mémoire est adaptée du travail de A.S.J.Suiker et al.[79, 80].

Classiquement, les critères de dimensionnement et de maintenance de la plateforme étaient fondés sur des méthodes statiques ou empiriques [63]. Lorsque les effets dynamiques devaient être pris en compte, on introduisait artificiellement une surcharge dynamique[14]. Dans les travaux effectués récemment [4], l'objectif est la prédiction du tassement en fonction du chargement dynamique. L'accélération du blochet a été prise comme paramètre observable dans les campagnes expérimentales menées avec le banc BESTT du LAMI, le banc à échelle 1 du LCPC-Nantes ou dans les études numériques de notre travail.

Les objectifs de notre démarche sont les suivants :

- évaluer les effets discrets, non-linéaires et unilatéraux dans la modélisation numérique ;
- valider les modèles et en sélectionner un adapté.

Ce mémoire de thèse se compose de trois parties.

La première fera un rapide survol bibliographique. Après avoir présenté la voie ferrée, qui est l'objet final de notre étude, on mettra en évidence quelques observations expérimentales

---

qui permettront la construction des modèles dans les parties suivantes. Comme ce mémoire est tourné essentiellement vers les modélisations théorique et numérique, on donnera quelques éléments de modélisation extraits de la littérature.

La deuxième partira de l'étude produite par A.S.J.Suiker et al.[79, 80]. Il s'agira de construire des modèles semi-analytiques linéaires au minimum avec deux couches. Deux cas ont été présentés : un cas 1D, un autre 3D. Deux programmes ont été conçus à cet effet.

De l'approche 3D semi-analytique, on a construit dans la troisième partie une famille d'éléments numériques discrets que l'on peut appliquer aux éléments finis. Le chapitre théorique reviendra sur la construction de ces éléments qui pourront être linéaires ou non, avec des effets sans tension<sup>5</sup>, discrets ou continus. S'en suivra un chapitre qui proposera des cas de validation des modèles présentés, ainsi que des applications à la voie ferrée ballastée.

La stratégie pour répondre à la problématique du tassement, et donc, de la maintenance sur les voies ferrées est la suivante : les modèles développés dans mon mémoire permettent de déterminer des accélérations sur les voies étudiées. D'un autre côté, A.A.Shaer[5] détermine expérimentalement une loi qui exprime le tassement en fonction de l'accélération. Par conséquent, en combinant les deux approches, on pourra évaluer le tassement d'une voie ferrée.

---

<sup>5</sup>les effets sans tension indiquent juste qu'une interaction non nulle se produit entre deux grains dès lors que ces grains sont en contact



**Première partie**

**Bibliographie**



# Chapitre 2

## La voie ferrée

Depuis les premières lignes de chemin de fer au dix-neuvième siècle, la structure des voies ferrées de même que les moyens de locomotion ont bien évolué. Les différents composants des voies ferrées sont venus les uns après les autres au gré des tentatives empiriques. Actuellement, les voies ferrées sont de deux grands types : les voies ferrées sur dalles, et les voies ferrées ballastées. Ce qui suit présente succinctement les voies ferrées ballastées, qui font d'ailleurs l'objet de notre travail. La première section présente quelques caractéristiques techniques, géométriques et fonctionnelles de la voie. Puis, dans la seconde section, quelques défauts de voie et moyens de maintenance seront évoqués.

### 2.1 Description de la voie ferrée

#### 2.1.1 La voie

La voie désigne l'ensemble des constituants assurant la circulation des trains et supportant les efforts transversaux, longitudinaux et verticaux. Les lignes à grande vitesse (LGV) sont généralement constituées de deux voies juxtaposées permettant une vitesse commerciale de 300km/h. Elles sont banalisées dès lors que la circulation s'effectue dans les deux sens.

La LGV a un écartement standard de  $1.435m$  entre les deux files de rails. Elle repose sur une structure d'assise, appelée plate-forme (fig.2.1). La grande vitesse nécessite la maîtrise de la stabilité du matériel roulant, ce qui implique une très grande qualité des infrastructures.

#### 2.1.2 Le rail

Le rail (fig.2.2) assure le support vertical des roues des véhicules et guide les roues dans le sens transversal. Le rôle du rail est de diriger les trains et d'assurer la transmission et la répartition de la charge sur les traverses. Le rail est un assemblage de barres élémentaires de  $36m$  ou  $72m$  de masse linéique de  $60kg/m$ , soudées électriquement pour obtenir des Longs Rails Soudés (LRS).

#### 2.1.3 La traverse

Les traverses permettent :

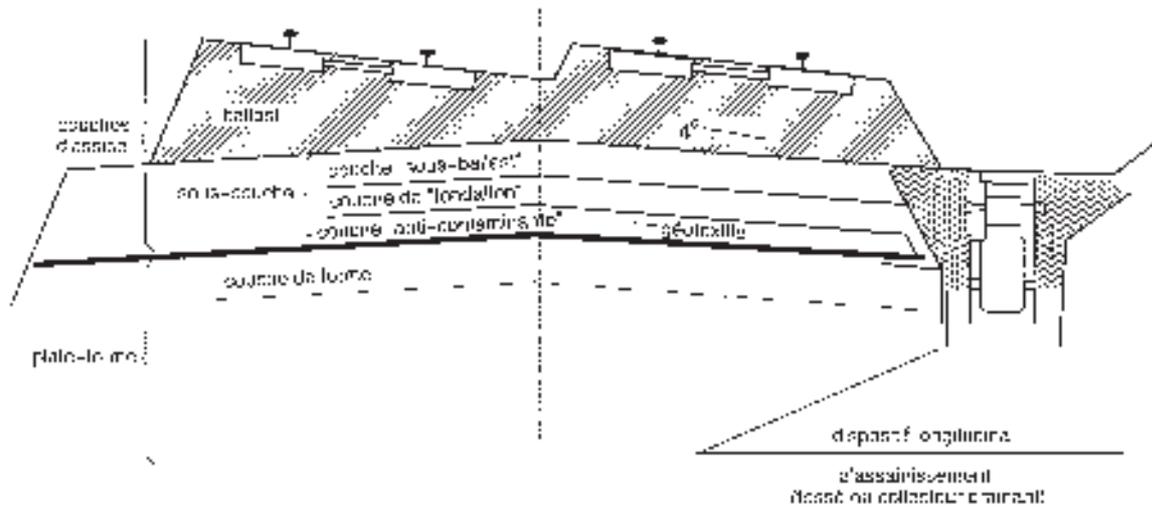


FIG. 2.1 – Coupe d'une voie ferrée[3]

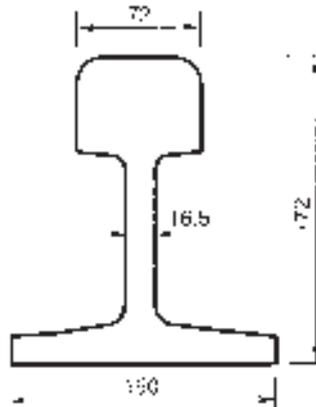


FIG. 2.2 – Coupe d'un rail au standard UIC[3]

- la transmission des charges dynamiques et statiques du rail sur le ballast,
- le maintien de l'écartement des deux files de rail,
- le maintien d'une certaine inclinaison du rail (1/20)

Les traverses modernes sont appelées traverses mixtes de type Vagneux. Elles peuvent être soit monoblocs, soit biblocs (fig.2.3) (les deux blocs sont liés par une entretoise en acier). Les traverses actuelles (VAXU41) pèsent 245kg et mesurent 2.415m de long.

#### 2.1.4 Le ballast

Le ballast est un granulat provenant du concassage de roches extraites dans des carrières de pierres dures (granite, diorite, rhyolite, quartzite, grès). Il constitue un élément support de la voie et fait partie de la superstructure.

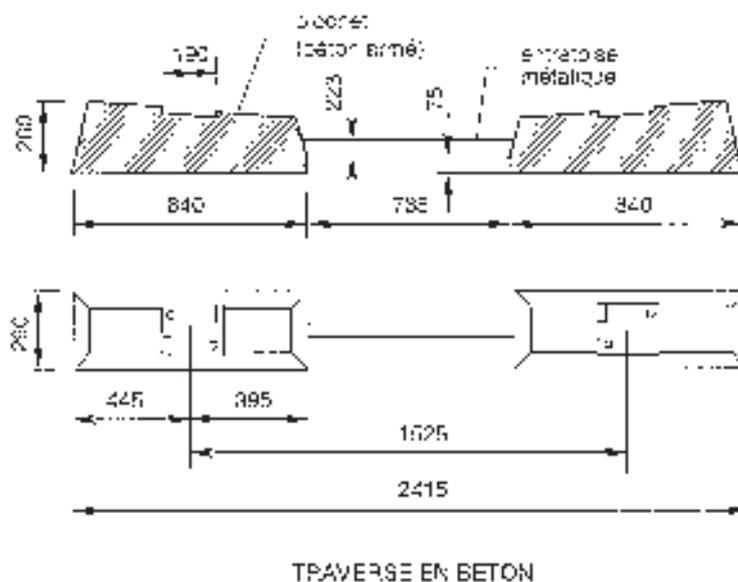


FIG. 2.3 – Traverse bibloc en béton[3]

Il est disposé en couches sous et autour des traverses. L'épaisseur de la couche de ballast sous les traverses est de 30 cm environ. Les fonctions du ballast sont les suivantes :

- transmission et répartition des efforts,
- absorption des vibrations mécaniques et acoustiques,
- ancrage latéral (circulation en curve) et longitudinal de la voie (accélération, freinage),
- drainage des eaux pluviales,
- maintenance et mise en place aisées de la voie.

La qualité du ballast est définie dans la norme européenne "NF EN 13450". Le ballast doit répondre aux critères suivants :

- une granulométrie et une propreté qui assure un bon drainage,
- une angularité pour la résistance au cisaillement,
- une insensibilité à l'eau et au gel,
- une homogénéité de la forme des grains, en évitant les formes allongées ou aplaties,
- une bonne résistance mécanique pour résister aux efforts.

Sur les voies ferrées françaises actuelles, on utilise un granulats concassé de 25 – 50mm.

### 2.1.5 Les structures d'assise

La couche de ballast repose sur une structure d'assise comprenant la sous-couche et la plate-forme.

Les objectifs de la sous-couche sont :

- protection de la plate-forme contre l'action du poinçonnement par la couche de ballast,
- protection de la plate-forme contre le gel,
- répartition des charges transmises à la plate-forme.

Elle se compose :

- d'une couche "sous-ballast" : graves propres (0/31.5)
- de la couche de fondation (facultative) : graves compactées

- d'une couche anti-contaminante (facultative) : constituée de sable propre.

## 2.2 Vie de la voie

### 2.2.1 Description des défauts de la voie

Les défauts de voie entraînent un inconfort des voyageurs et peuvent mettre en jeu la sécurité des circulations s'ils sont trop importants. Ils sont identifiés à l'aide d'une rame spéciale appelée "voiture Mauzin" qui fournit des enregistrements au fur et à mesure de l'avancement de la voiture (fig.2.4).

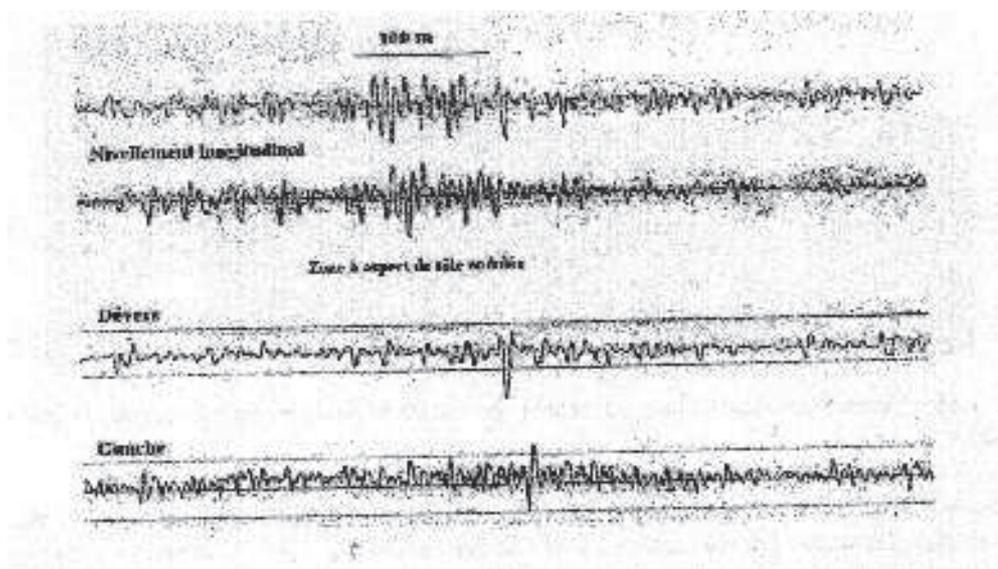


FIG. 2.4 – Enregistrement Mauzin[69]

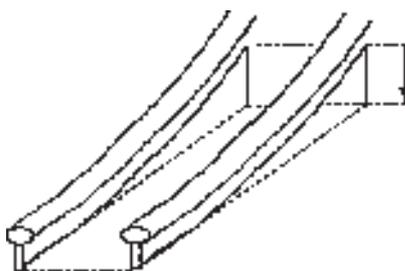


FIG. 2.5 – Schéma du nivellement longitudinal[44]

Dans le plan vertical, on distingue le nivellement longitudinal (fig.2.5) (résultant du tassement global et résiduel), et le nivellement transversal que l'on évalue avec :

- l'écart de dévers qui représente l'inclinaison transversale de la voie (fig.2.6)
- le gauche ou torsion de voie qui représente le décalage vertical entre les deux files de rails (fig.2.7).

Dans le plan horizontal, les défauts sont de deux types :

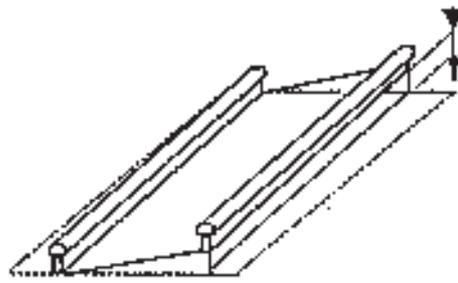


FIG. 2.6 – Ecart de dévers[44]

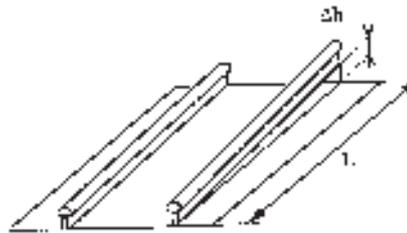


FIG. 2.7 – Torsion de la voie ou gauche[44]

- le défaut de dressage qui représente la variation transversale du milieu des rails par rapport à la position théorique initiale (fig.2.8)

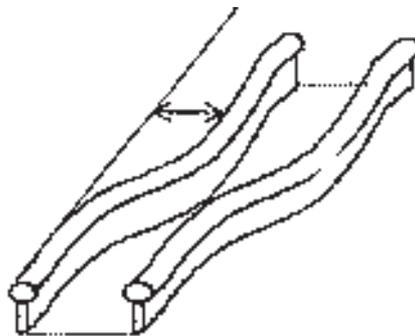


FIG. 2.8 – Défaut de dressage[44]

- le défaut d'écartement des rails entre eux.

## 2.2.2 Seuils d'intervention pour les lignes à grande vitesse

La voie est définie par plusieurs niveaux de dégradation par importance décroissante :

- VR : valeur de ralentissement à partir desquelles des mesures de restriction de vitesse de circulation sont à prendre.
- VI : valeur d'intervention qui impose une intervention dans un délai suffisamment court afin d'éviter le niveau VR.
- VA : valeur d'alerte qui impose une surveillance ou une intervention programmée à moyen terme.
- VO : valeur d'objectif

Ces critères sont utilisés par exemple pour qualifier l'écartement de la voie, le nivellement longitudinal, et le nivellement transversal.

### 2.2.3 Opérations de maintenance

La plus importante opération d'entretien de la voie est un renouvellement de voie ballastée (RVB) : tous les constituants de la voie sont remplacés. Cette lourde et coûteuse opération se produit au bout de 25 ans environ, mais cela dépend fortement de la vitesse de roulement sur la voie. Par exemple, les LGV<sup>1</sup> se dégradent plus vite que les lignes classiques à cause principalement de la grande vitesse. Plusieurs hypothèses phénoménologiques existent : des indices sur des changements de régime à l'intérieur de l'amas granulaire.

L'opération la plus courante pour corriger les petits défauts de voie dans le ballast est le bourrage. Cela consiste en une correction des défauts par vibration et serrage des grains situés sous les traverses avec un engin appelé "bourreuse" qui procède selon la séquence suivante :

- soulèvement des rails et des traverses
- mise en place des bourroirs qui vont faire vibrer le ballast entre 35 et 45Hz
- serrage du ballast
- remontée des bourroirs et passage à la traverse suivante

## 2.3 Conclusion du chapitre

Une voie ferrée contient : deux rails, des traverses, une couche de ballast, le tout reposant sur un multicouche appelé structure d'assise. Le ballast, qui va nous concerner plus spécialement dans le reste de ce mémoire est un matériau dur, avec une taille de grain assez importante (entre 25 et 50 mm) par rapport à l'épaisseur de sa couche sous les traverses (30cm).

Sous l'influence de nombreux facteurs (gel, structure du sol, nombre, masse et vitesse des trains), les voies peuvent se dégrader. La mesure de la dégradation, à l'aide par exemple d'une voiture "Mauzin", permet de déterminer cet état de dégradation, et de décider quel type d'intervention produire, depuis le bourrage (simple remise en place des grains de ballast) jusqu'au renouvellement complet de la voie.

---

<sup>1</sup>Ligne à Grande Vitesse

# Chapitre 3

## Observations expérimentales

La synthèse bibliographique qui suit présente des résultats et des observations qui ont contribué à la réflexion sur les voies ferrées ballastées soumises à des trains à grande vitesse (TGV) : cette synthèse présente les résultats qui seront utiles pour l'élaboration des modèles numériques de la partie 3.

Faire des expérimentations in situ est nécessaire, mais certaines difficultés apparaissent : les différentes conditions (conditions aux limites, stratigraphie, valeur des différents modules d'Young des strates) sont souvent mal maîtrisées. Afin de s'affranchir de ce genre de conditions, des bancs d'essai qui représentent des portions de voie ont été construits. Pour des raisons de coût et d'encombrement, on a souvent réduit la taille des différents constituants de ces bancs pour en faire des bancs à échelle réduite. Pour passer des valeurs à échelle réelle aux valeurs à échelle réduite, et réciproquement, des règles appelées lois de similitude ont été introduites. Ces lois de similitudes ont été notamment employées par N.Guérin[33], V.Bodin[14] et A.Al Shaer[4] au LAMI pour interpréter à échelle réelle les résultats qu'ils ont obtenus sur les bancs d'essai à échelle réduite : il en est ressorti en particulier des lois de tassement du ballast et une quantification de la variabilité des résultats des expérimentations.

Ainsi, dans ce chapitre, on présentera d'abord ces lois de similitudes. Puis, on fera un point des observations et méthodes expérimentales appliquées aux voies ferrées.

### 3.1 Les règles de similitude

Pour des raisons pratiques, par exemple d'encombrement ou de coût, les expérimentateurs ont été amenés à utiliser des ballasts à échelle réduite, et notamment à échelle un tiers[4, 5]. Les règles de similitude permettent de retrouver après calculs, les valeurs correspondantes pour un ballast à échelle réelle.

Le principe de base du changement d'échelle consiste à reproduire à une échelle plus petite le phénomène à observer : ici, le tassement sous les blochets. Deux phénomènes peuvent être à l'origine de ce tassement : l'usure des grains de ballast (appelée "attrition") qui nécessite la conservation du champ des contraintes entre les deux échelles, alors que le réarrangement granulaire par vibration nécessite la conservation du champ des accélérations.

Pour ces deux méthodes de conservation, on utilise la relation fondamentale de la dynamique :

$$\underline{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_v = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

avec :

- $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})$  est la divergence du tenseur de Cauchy des contraintes,
- $\underline{f}_v = \rho \underline{g}$  représente les forces volumiques (par exemple la gravité),  $\rho$  la masse volumique du milieu étudié, et  $\underline{g}$  la gravité,
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  correspond à l'accélération.

### 3.1.1 Conservation du champ des contraintes

Cette règle de similitude repose sur l'hypothèse que le tassement est provoqué par usure sous les blochets.

Si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est conservé dans la relation 3.1, et que les longueurs sont divisées par 3, il vient :

- $\text{div}(\underline{\underline{\sigma}})$  est multiplié par 3
- par conséquent, les forces volumiques doivent être multipliées par 3 ;
- la nature du microballast est la même que celle du ballast à échelle normale : cela implique entre autres que la masse volumique entre les échelles réduite et réelle est conservée.
- Ainsi, l'accélération devra être multipliée par 3.
- Et donc, puisque les longueurs sont divisées par 3, le temps sera divisé par 3, c'est à dire que la fréquence de sollicitation sera multipliée par 3.
- Comme les contraintes sont des forces par unité de surface, les forces seront divisées par 9

#### Bilan pour passer d'une échelle réelle à une échelle un tiers sous l'hypothèse de conservation du champ des contraintes

- les contraintes sont conservées
- la masse volumique est conservée
- les longueurs sont divisées par 3
- les forces sont divisées par 9
- la fréquence de sollicitation est multipliée par 3
- l'accélération est multipliée par 3
- la pesanteur, comme les autres forces de volume, est multipliée par 3.

La principale difficulté de cette similitude réside dans le fait que la gravité pour le ballast à échelle réduite doit être trois fois supérieure à la gravité terrestre usuelle. Pour simuler une telle gravité, trois solutions sont possibles :

1. mettre le dispositif expérimental dans une centrifugeuse
2. créer un vide partiel sur l'échantillon
3. compenser le déficit de gravité au niveau de la couche de ballast située juste sous les blochets, par une masse additionnelle équivalente à deux fois la masse des grains de ballast.

### 3.1.2 Conservation du champ d'accélération

Cette règle repose sur l'hypothèse que le tassement est dû essentiellement à des réarrangements de grains par vibration.

Ici, le champ d'accélération est conservé (cf.3.1). De plus, comme précédemment, la nature du microballast étant la même que celle du ballast à échelle réelle, la masse volumique est conservée entre les deux échelles. Les longueurs sont divisées par 3. Il vient :

- Comme  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  est conservé, les forces volumiques et  $\text{div}(\underline{\sigma})$  sont conservées.
- Ainsi,  $\underline{\sigma}$  est divisé par trois. Et donc, les forces sont divisées par 27.
- comme  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  est conservé et que  $\underline{u}$  est divisé par 3, la fréquence est multipliée par  $\sqrt{3}$

#### **Bilan : pour passer de l'échelle réelle à une échelle un tiers sous l'hypothèse de conservation du champ d'accélération**

- les longueurs sont divisées par 3
- l'accélération est conservée
- la masse volumique est conservée
- les forces sont divisées par 27
- les contraintes sont divisées par 3
- la fréquence est multipliée par  $\sqrt{3}$
- la pesanteur est conservée, au même titre que les éventuelles autres forces de volume

## **3.2 Dispositifs expérimentaux d'observation d'une voie ferrée**

Les dispositifs expérimentaux sont de trois types : observations in-situ, sur un banc d'essai à échelle réelle, ou bien sur un banc d'essai à échelle réduite.

### **3.2.1 Observations in-situ**

Quelques voies ferrées sont instrumentées en Europe (France, Espagne, Royaume Uni, Allemagne principalement). L'avantage est la maîtrise des signaux et des réponses réels. Les sollicitations employées par les bancs pour simuler le passage des trains se fondent d'ailleurs sur ces signaux réels.

Pourtant, les observations in-situ demeurent relativement délicates :

- le positionnement des capteurs en voie est difficile. Leur sensibilité et leur robustesse (fiabilité) ne permettent pas pour le moment des observations fines.
- la géométrie de la voie dès la construction, mais surtout après les premières opérations de maintenance (bourrage) est assez peu précise pour réaliser des validations de modèles.

En outre, les essais en voie sont coûteux en argent et en temps puisque la voie doit être remise en état pour permettre à nouveau la circulation ferroviaire.

En fait, on utilise les sites in-situ (La Pallud) afin d'une part de trouver des signaux réels à implémenter dans les bancs d'essais, et d'autre part, une fois que les modèles de voie sont validés, de prédire l'évolution des voies ferrées.

### **3.2.2 Banc d'essai à échelle réelle**

L'intérêt principal d'un banc d'essai à échelle réelle ou réduite est la maîtrise des paramètres et de l'instrumentation. Dans le cadre du contrat entre le LCPC et la SNCF, des essais à échelle réelle ont été menés au LCPC-Nantes.

Cet essai représente une portion de voie réelle avec un seul blochet et de forme axisymétrique [4, 5]. Tous les essais sont réalisés sur un massif quasi-circulaire de  $3.5m$  de diamètre. Les multicouches représentant la voie réelle y ont été de deux types : un comprenant blochet/ballast/élastomère (représentant une sous-couche équivalente), un autre comprenant blochet/ballast/sous-couche/sol (représentant plus fidèlement la réalité géométrique de la voie).

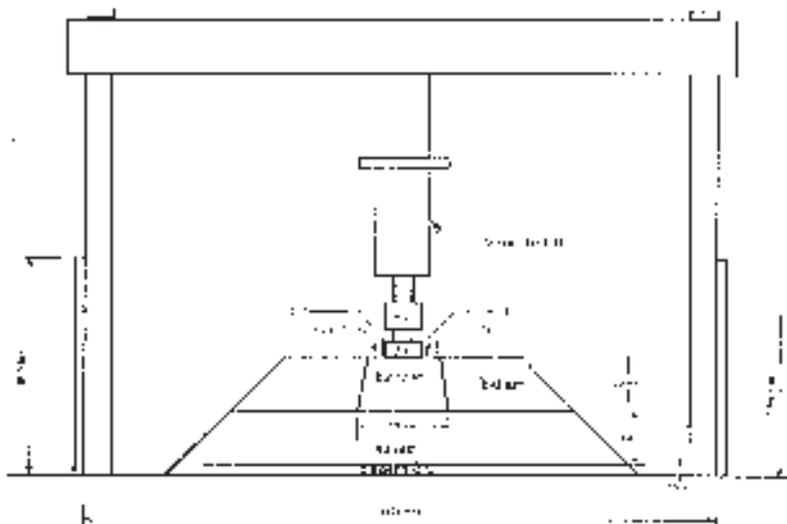


FIG. 3.1 – Multicouche blochet/ballast/élastomère testé dans le cadre du banc d'essai à échelle réelle axisymétrique du LCPC [5]

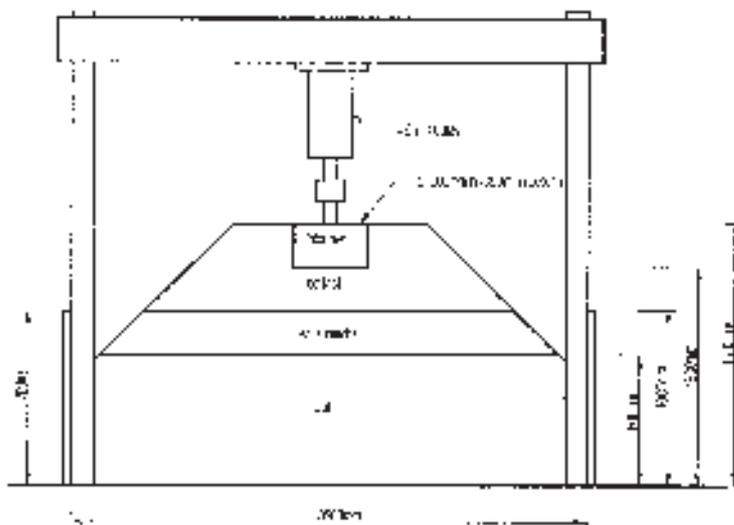


FIG. 3.2 – Multicouche blochet/ballast/sous-sol/sol testé dans le cadre du banc d'essai à échelle réelle axisymétrique du LCPC [5]

Des chargements sinusoïdaux, et de forme  $M$  sont testés jusqu'à la vitesse de  $400km/h$ . La force en  $M$  représente les deux essieux d'un bogie. On peut comprendre la constitution de

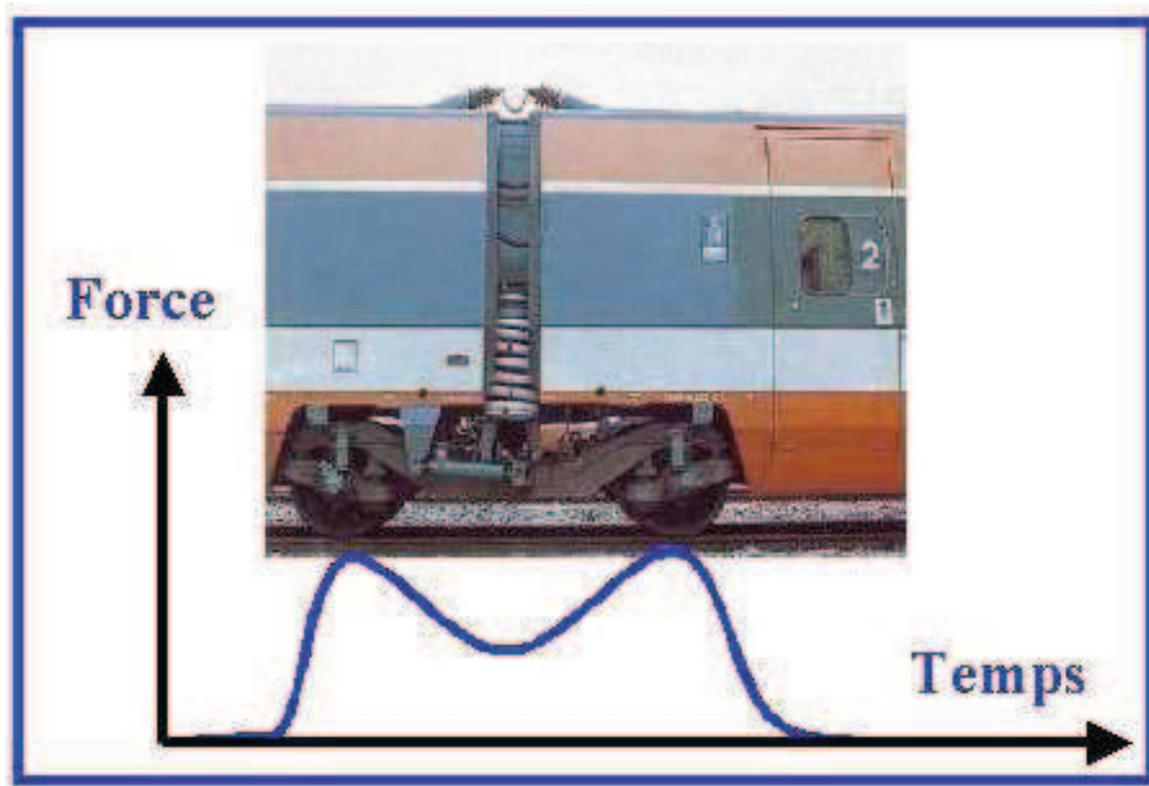


FIG. 3.3 – Signal de bogie en M

cette force sur la figure 3.3. Avec un modèle unidimensionnel masse/ressort/amortisseur, les mesures de déplacement sont représentées de manière satisfaisante (4% d'erreur relative) dès qu'on effectue des essais sur la plate-forme seule (sans ballast) [5]. Ali Al Shaer a aussi introduit un modèle 3D linéaire par blocs. Le ballast qui est un matériau granulaire non-linéaire est décomposé en deux parties : un ballast compacté sous le blochet avec une "descente de rigidité" à 45 degrés (rigidité de  $200\text{MPa}$ ), et un ballast non compacté de  $8\text{MPa}$ . Les résultats pour différentes vitesses (de 160 à 360km/h) ont été convaincants. En ce qui concerne le tassement du blochet, la loi de tassement n'a pas la même forme que celle trouvée par V.Bodin[14] (cf.section suivante). Elle s'écrit de façon différente avec une plate-forme rigide ou molle :

- Cas de la plate-forme molle

$$\frac{d\tau}{dN} = 30,52 \cdot 10^{-6} d^{2.41} \quad (3.2)$$

- Cas de la plate-forme rigide

$$\frac{d\tau}{dN} = 9,67 \cdot 10^{-6} d^{1.46} \quad (3.3)$$

D'après A.Al Shaer[5], la différence importante avec les résultats de V.Bodin peut être expliquée par la différence de géométrie entre les deux essais (Nantes/BETTER), de même que par le protocole expérimental de V.Bodin, plus prudent sur la stabilisation des cycles de chargement (1 million de cycles) pour chaque vitesse de roulement.

### 3.2.3 Banc d'essai à échelle un tiers

L'avantage de disposer d'un banc et de matériaux à échelle réduite est une question de coût et d'encombrement. Au LAMI, deux essais sur des bancs à échelle un tiers : l'essai MICROBALLAST et l'essai BETTER.

#### 3.2.3.1 Essai MICROBALLAST

En 1996, N.Guérin [33] a étudié des lois de tassement du ballast des voies ferrées. Pour cela, elle a utilisé un dispositif à échelle réduite appelé MICROBALLAST (fig.3.4 et fig.3.5). Le banc MICROBALLAST reproduit un blochet cylindrique en béton à base circulaire, noyé dans un massif de ballast à échelle réduite.

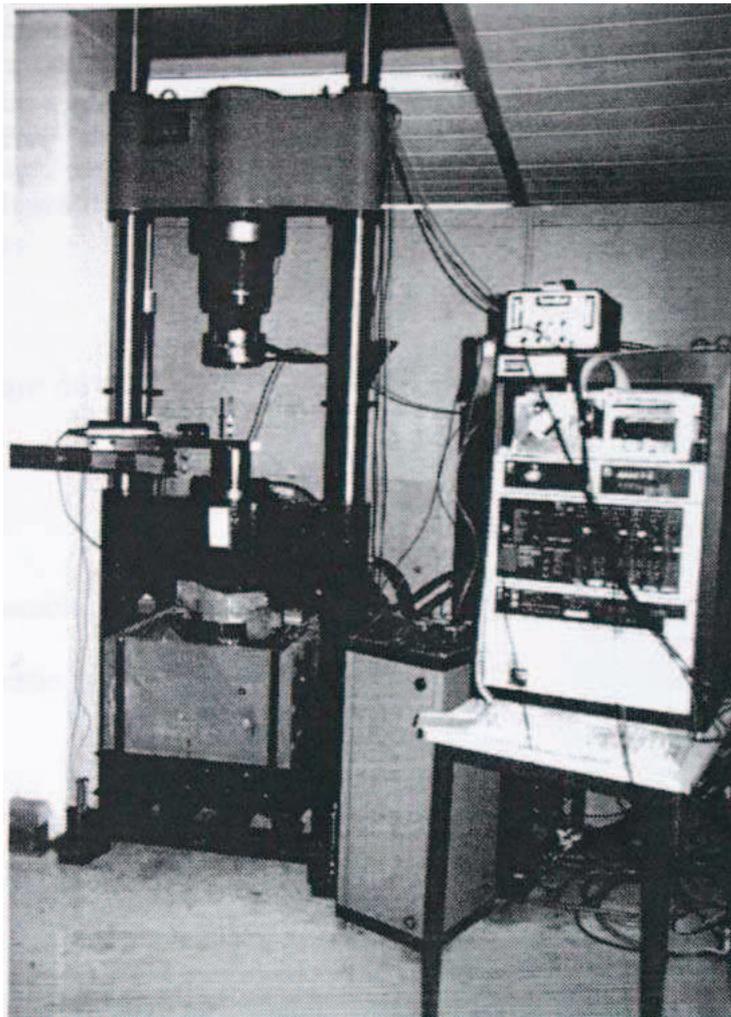


FIG. 3.4 – Dispositif global du banc MICROBALLAST [33]

Le but de cette expérience est d'établir une loi de tassement vertical à grand nombre de cycles. N.Guérin [33] suppose que les efforts intergranulaires et l'usure qui en résulte pilotent le tassement. Par conséquent, pour passer des grandeurs réduites mesurées aux "vraies" valeurs, l'hypothèse utilisée sera celle de la conservation des contraintes. Du même coup, il a fallu imposer une gravité trois fois supérieure à la normale. La technique utilisée a été celle du vide. On aurait pu employer également une centrifugeuse.

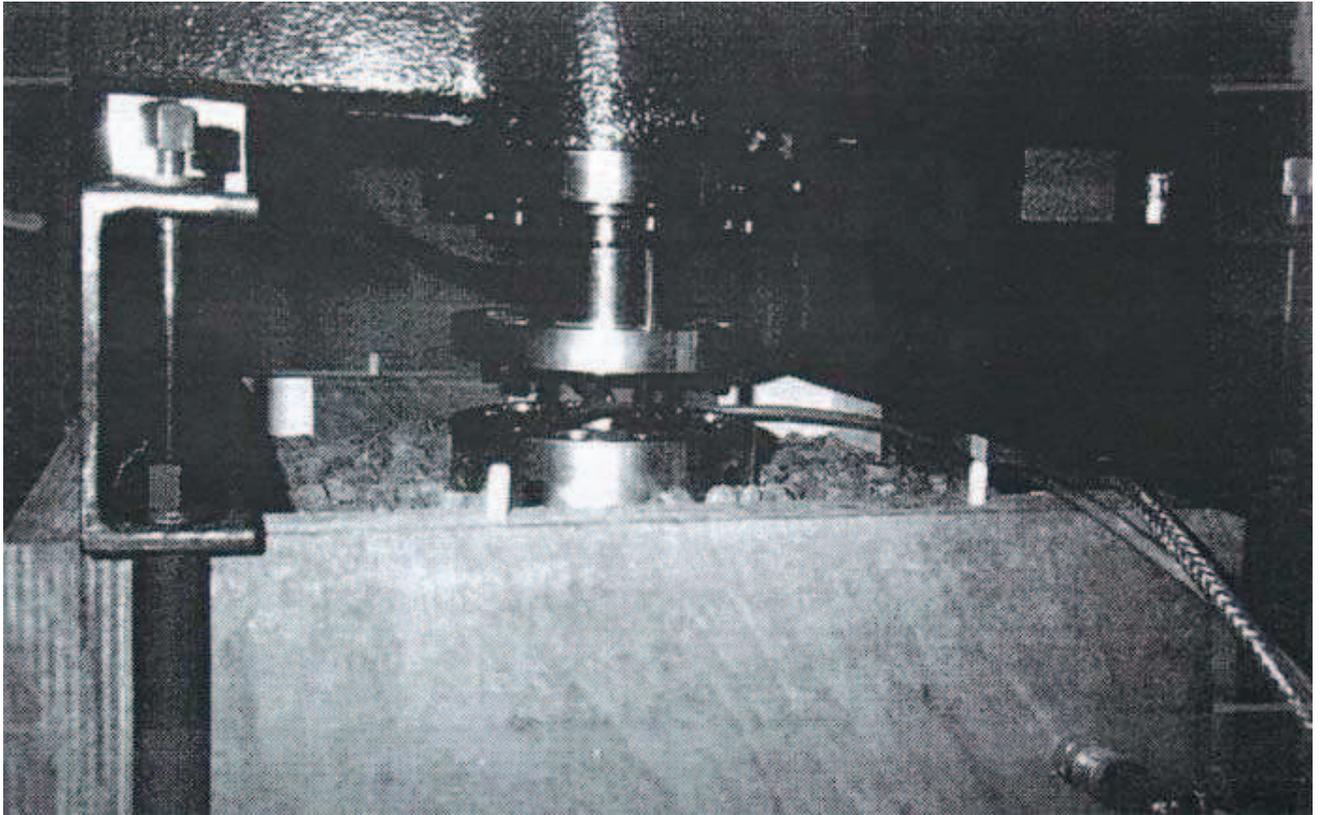


FIG. 3.5 – Contact vérin-ballast dans le banc MICROBALLAST [33]

Différentes charges à l'essieu (de 14 à 20 tonnes), raideurs de ballast (de 30 à 100MPa), et vitesses de sollicitations (de 1 à 70m/s) ont été testées.

En régime stabilisé, N.Guérin[33] a trouvé une formulation qui relie l'incrément de tassement vertical  $\frac{d\tau}{dN}$  (en mm par cycle) à la déflexion élastique verticale  $\delta$  (en mm) :

$$\frac{d\tau}{dN} = \alpha\delta^\beta \quad (3.4)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux coefficients constants. A échelle réduite, les valeurs de ces coefficients sont :

$$\alpha = 4.8.10^{-7} \quad (3.5)$$

$$\beta = 2,51 \quad (3.6)$$

Les essais montrent également que la déflexion verticale augmente avec la charge à l'essieu. Des mesures en voie ont montré qu'effectivement il y avait un lien entre le tassement et la déflexion élastique : cependant, l'ordre de grandeur des incréments de tassement sur la voie réelle est 10 fois (environ) supérieur à celui obtenu par la "loi microballast".

On peut penser à l'issue de cette expérience que "l'ajout de gravité" par la bêche à vide a supprimé les phénomènes vibratoires, et n'a permis finalement que la mesure des tassements causés par l'attrition des grains. Le corollaire de ce qui précède est que l'usure n'est probablement pas le seul phénomène en jeu dans le tassement, ni même le principal. En conséquence, la loi de similitude employée n'est sans doute pas la bonne : pour étudier le tassement du ballast avec une échelle réduite, il faudra utiliser l'autre méthode de similitude, celle conservant les accélérations.

### 3.2.3.2 Essai BETTER

A l'aide d'un banc d'essai à échelle réduite (un tiers), V.Bodin [14] a étudié le comportement du ballast sous tassement latéral et vertical. On se limitera ici aux effets verticaux. Le banc BETTER 3.6 reproduit à échelle un tiers une portion de voie ballastée entourant une traverse bi-blocs en béton. Une caisse en bois contenant traverse et ballast à échelles réduites repose sur un portique, lui-même portant un vérin hydraulique. Le sol en-dessous du ballast est modélisé par un élastomère[14].

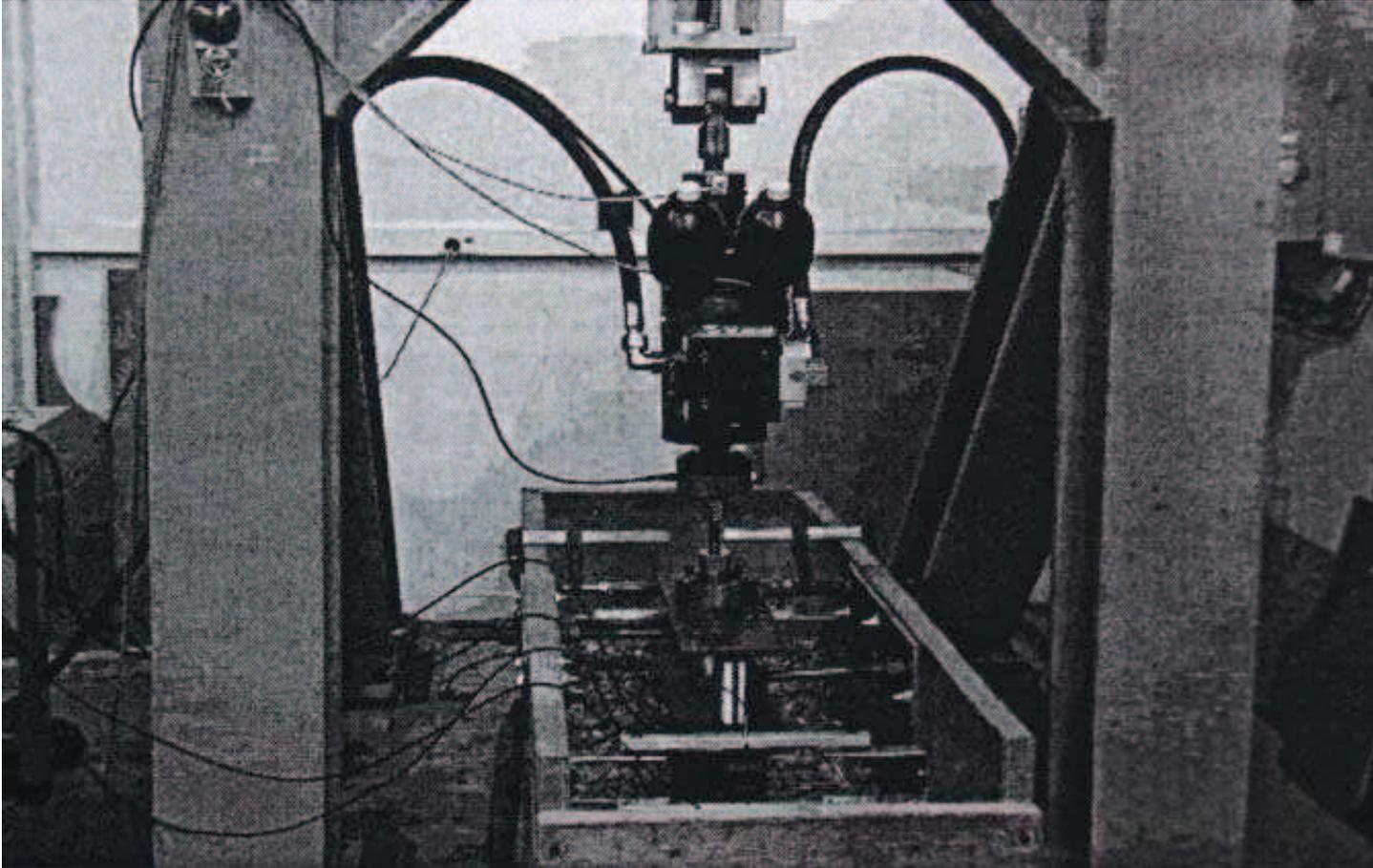


FIG. 3.6 – Banc BETTER [14]

Tirant les enseignements des expériences “MICROBALLAST”, V.Bodin a supposé que le phénomène le plus important était le réarrangement granulaire, et non plus l'usure. Par conséquent, elle a utilisé la règle de similitude qui conserve les accélérations.

Ainsi, pour des essais de plus de 250000 cycles, une loi de tassement pour l'échelle réduite peut se formuler :

$$\frac{d\tau_v}{dN} = 2,5 \cdot 10^{-6} \delta_v^{1.17} \quad (3.7)$$

où  $\frac{d\tau_v}{dN}$  l'incrément de tassement vertical,  $\delta_v$  est la déflexion verticale.

Cette loi établie sur le banc BETTER est de la même forme que la loi MICROBALLAST. Seuls les coefficients diffèrent. Toutefois, alors que les tassements étaient 10 fois trop faibles avec la loi MICROBALLAST, la loi BETTER semble en accord avec les observations. V.Bodin

en a déduit que le phénomène prépondérant est le réarrangement granulaire, et que donc l'usure n'est qu'un phénomène secondaire.

Afin de tester l'influence de la fréquence de sollicitation, V. Bodin fait varier cette fréquence entre 0 et 60 Hz. Aux alentours de 40 Hz, elle constate que le tassement s'accroît de manière très importante. Puis, en continuant à augmenter la fréquence de la sollicitation jusqu'à 60 Hz, elle ne constate pas de décroissance de l'incrément de tassement. A cause de cela, selon elle, il ne s'agit pas d'une résonance, mais du franchissement d'une valeur critique de l'accélération. Ce qui confirme son opinion, c'est que sur des études différentes, elle obtient pratiquement la même valeur critique de l'accélération ( $14m.S^{-2}$ ). Toutefois, on n'a pas montré jusqu'à présent si cette accélération critique était une valeur intrinsèque, ou bien liée aux conditions aux limites, nature des matériaux, caractéristiques de la sollicitation.

En somme, elle définit l'accélération critique par la valeur de l'accélération au moment où le ballast s'écoule et change de régime. On peut comprendre ce changement de régime par le relâchement granulaire qui intervient dès lors que l'accélération vers le haut devient plus importante que la gravité.

L'accélération paraît donc être un paramètre plus significatif que la déflexion pour les grandes vitesses de circulation.

### 3.2.3.3 Description générale de l'essai BESTT ([4])

Le LAMI a élaboré avec la SNCF et d'autres unités du LCPC, un essai à échelle réduite (1/3), la nouvelle version de l'essai BETTER, qui est représenté par un portion de voie constitué par trois traverses bi-blocs, afin de simuler le passage d'une charge roulante sur la portion. Ces traverses sont mises en charge à l'aide de trois vérins hydrauliques qui fournissent des signaux ayant la forme de la lettre "M" et appliqués sur les traverses avec un décalage en temps.

L'éprouvette comporte une couche de ballast à échelle un tiers (micro-ballast), reposant sur une couche de sable représentant la couche d'assise. Cinq traverses bi-blocs en béton armé, reproduction à échelle un tiers d'une traverse bi-blocs à échelle réelle, sont posées sur 10 cm de microballast (équivalent à 30 cm à échelle réelle), et sont entourées de microballast jusqu'à leurs surfaces supérieures. L'ensemble est posé sur un massif contenant plusieurs couches de matériaux différents afin de bien simuler un demi-espace infini. La couche de ballast est limitée sur les deux côtés par des plans inclinés (talus) qui représentent les bords libres du ballast. Le portique, solidaire de la dalle et supportant les vérins à paliers hyrostatiques, a été dimensionné par le LCPC. Trois traverses sont chargées par l'intermédiaire de pièces de répartition en acier, de manière à pouvoir obtenir un niveau de chargement vertical identique sur les deux blochets de la même traverse. Le passage des trains est simulé par des signaux appliqués sur chaque traverse, avec un décalage en temps, à l'aide de vérins hydrauliques.

Le massif comprend, du haut vers le bas, une dalle en acier (0,07 m d'épaisseur), une couche de béton (1 m) entourée par des plaquettes de polystyrène, une couche de sable. Tous les constituants du banc d'essai (portion de voie + massif) sont supportés par une fondation en béton armé capable de porter le poids important du banc.

Du fait que l'on s'intéresse au comportement dynamique de la voie, il est important d'adopter une loi de similitude conservant le champ d'accélération. Les essais à réaliser consistent à simuler le passage d'un train sur trois traverses en appliquant un signal sur chaque traverse avec un certain décalage en temps reproduisant le passage d'un bogie. Comme le train comporte plusieurs bogies, il faut appliquer successivement plusieurs signaux. Chaque cycle correspond

au passage d'un bogie.

Les observations sont les suivantes :

- l'évolution de la rigidité (dynamique et statique) est très variable en fonction du nombre de cycles. On peut trouver une rigidité statique maximale 88% plus élevée que celle de départ, et une rigidité dynamique maximale 67% plus élevée que celle de départ. L'effet dynamique peut être constaté en comparant les deux rigidités statique et dynamique, on peut atteindre une différence de 40%.
- Les simulations numériques ont lieu avec un modèle linéaire avec deux rigidités de ballast : une zone rigide sous la descente de charges à 45 degrés sous les traverses, et faiblement rigide en dehors. Ces simulations sont globalement satisfaisantes pour les valeurs de déplacement élastique maximal. En revanche, les valeurs des accélérations et des pressions sont assez éloignées.
- Les incréments de tassement, de la traverse centrale, obtenus grâce à des essais avec trois vérins sollicités sont deux à quatre fois plus élevés que ceux obtenus avec un vérin pour des vitesses inférieures à 360 km/h, et dix fois plus élevés pour une vitesse de 400km/h.
- Les déplacements élastiques maximaux, de la traverse centrale, obtenus grâce à des essais avec trois vérins sollicités sont à peu près 1,3 fois plus élevés que ceux obtenus avec un vérin.
- Les accélérations mesurées sur les blochets de la traverse centrale et dans le ballast, obtenues grâce à des essais avec trois vérins sollicités sont plus élevées que celles obtenues avec un vérin. Le rapport des deux accélérations augmente avec la vitesse de roulement.
- Au niveau de l'accélération du blochet que cela soit vers le bas ou vers le haut, elle augmente avec la vitesse de roulement (fréquence d'excitation).

En outre, Ali Al Shaer a remarqué que la dispersion des mesures avait tendance à augmenter avec la vitesse de sollicitation. C'est pourquoi il s'est intéressé à l'écart type de l'incrément de tassement et celui de l'accélération dans le ballast vers le bas en fonction de la vitesse de roulement. On constate que les deux écart-types varient d'une manière linéaire en fonction de la vitesse pour des vitesses inférieures ou égales à 360 km/h. Plus la vitesse est élevée, plus l'écart-type est important. A 400 km/h l'écart-type de l'incrément de tassement peut avoir une valeur très élevée qui peut être à peu près dix fois plus élevée que celle correspondant à 360km/h. Pour l'écart-type de l'accélération dans le ballast vers le bas, ce coefficient est de cinq entre 400 et 360km/h.

Il a ensuite montré expérimentalement les relations suivantes pour le banc à échelle réduite (1/3) entre l'incrément de tassement ( $I_t(1/3)$  en m), le déplacement élastique ( $d_e$  en m), et l'accélération du blochet vers le haut ( $a_{blh}$  en  $m.s^{-2}$ ) :

$$I_t(1/3) = 0.0000028d_e^2 - 0.00094d_e + 7.5 \times 10^{-2} \quad (3.8)$$

$$I_t(1/3) = 3.8 \times 10^{-11}a_{blh}^2 - 9.4 \times 10^{-11}a_{blh} + 5.6 \times 10^{-10} \quad (3.9)$$

Ali Al Shaer remarque à propos de la loi élaborée par V.Bodin suite à des essais avec une traverse sur du micro-ballast supporté par une couche d'élastomère ou de bois simulant le comportement élastique d'un demi-espace infini, n'est pas valable pour notre banc d'essai : la présence de sol, mais également de la charge mobile sur les trois traverses sont les principales différences par rapport aux simulations expérimentales de V.Bodin.

### 3.3 Conclusion du chapitre

Dans ce court chapitre de survol de la bibliographie, on a d'abord expliqué en quoi l'étude sur des échelles réduites peut être importante (encombrement et coûts), et comment, par des stratégies d'utilisation des règles de similitudes, on produit des résultats à échelle réelle à partir de ceux à échelle réduite. On a obtenu des lois de tassement du ballast à échelle un tiers, et montré que le facteur le plus important influençant le tassement était le réarrangement granulaire par rapport à l'usure. En outre, la valeur de l'accélération de la traverse et sa dispersion [5] en fonction de la simulation expérimentale semblent être les observables les plus pertinentes. A.Al Shaer a en outre montré l'influence de la vitesse sur l'accroissement de la déflexion verticale, le tassement, et la dispersion de l'accélération maximale.



# Chapitre 4

## Modélisations : modèles de comportement et effets dynamiques

Comme on ne peut pas tester toutes les formes de structures de voies ferrées de manière expérimentale, on passe alors à une phase plus amont qui consiste à modéliser la voie ferrée. Pour les sous couches (en-dessous du ballast), les matériaux, même s'ils sont hétérogènes, pourront être représentés par des modèles continus. Pour le ballast, à cause du faible nombre de grains dans la coupe verticale, l'approche continue est plus discutée. A cette occasion, des approches granulaires seront mises en place. Un autre élément important lorsqu'on considère un TGV sur une voie ferrée est bien sûr la vitesse de circulation du TGV. Par conséquent, notre modélisation sera dynamique.

La revue ici présentée ne se veut pas exhaustive, mais elle a pour but de montrer la grande diversité des approches possibles pour l'étude des voies ferrées. On commencera par présenter des modèles continus 1D et 3D. Puis, un des objectifs étant de déterminer l'effet du caractère discret du ballast à cause du faible nombre de grains dans la direction verticale, on évoquera les méthodes des éléments discrets. Cela nous amènera à décrire le modèle de Hertz, fréquemment utilisé pour exprimer le contact entre deux grains.

Ainsi, dans ce chapitre, on fera un point des outils, des techniques et des méthodes de résolution qui peuvent être utilisées pour la modélisation des voies ferrées ballastées. Cela nous permettra de déterminer comment nous allons construire notre propre modèle.

### 4.1 Modèles continus de la voie ferrée

#### Hypothèse d'un milieu continu :

**Lorsque la taille des particules est petite par rapport aux dimensions caractéristiques du problème, on utilise usuellement une modélisation continue.**

Si on veut donner une image, le passage d'une description granulaire à une description continue s'effectue dès lors que l'on se place à une échelle beaucoup plus grande que celle des grains, qui ne permet plus de distinguer les grains : on a une impression de continuité.

Une modélisation continue est souvent utilisée pour modéliser les voies ferrées ballastées.

Les lois de comportement les plus utilisées dans la littérature sont : les lois élastiques (linéaires ou non), les lois plastiques (avec ou sans écrouissage), et les variantes qui combinent les deux types précédents (lois élastoplastiques).

Les différents composants de la voie ferrée ont été souvent étudiés par des modèles continus. Pour le rail[55] par exemple, on utilise fréquemment des modèles de poutres comme Euler-Bernoulli[3, 31], ou bien, si l'on souhaite tenir compte de l'influence du cisaillement, des modèles de Timoshenko[20, 31]. Les semelles, qui ont pour vocation d'amortir les vibrations (sons par exemple), sont représentées (mais rarement) par des ressorts-amortisseurs [3, 70]. Les traverses [54] sont considérées souvent comme des corps rigides : masses ponctuelles 1D, corps rigides en 2D ou 3D.

Le ballast est le composant le plus complexe de la voie à cause de ses propriétés discrètes. En 1D, les modèles les plus simples estiment que c'est un système continu de ressorts dont la masse est uniforme[4, 70]. Les problèmes 2D et 3D proposent des approches visco-élastiques linéaires[9, 14, 47] ou non-linéaires[8]. Comme le ballast est un matériau non-linéaire notamment par son caractère discret, des approches unilatérales ont été introduites. Dans le cas 1D, Clelland[23] est parti des observations sur une chaîne finie de particules circulaires de mêmes rayons afin de déduire une loi de comportement intégrant des éléments discrets (caractéristiques des grains) et continu (paramètres macroscopiques comme la contrainte et la déformation). Cette loi de comportement est écrite ci-après :

$$\sigma = -k_1 d \left(1 - \frac{1}{1 - \epsilon}\right) - k_2 d^2 \left(1 - \frac{1}{1 - \epsilon}\right)^2 \quad (4.1)$$

avec :  $k_1, k_2$  sont des constantes,  $d$  est le diamètre des grains,  $\sigma$  la contrainte, et  $\epsilon$  la déformation (gradient de déplacement). D'autres lois de comportement 1D sont linéaires par morceaux : la traction et la compression ont des rigidités distinctes. Cela se traduit par :

$$\sigma = E_t \epsilon, \epsilon > 0 \quad (4.2)$$

$$\sigma = E_c \epsilon, \epsilon < 0 \quad (4.3)$$

où :  $E_c$  et  $E_t$  sont respectivement les modules d'Young en compression et en traction C'est cette distinction entre la traction et la compression qui assure la non-linéarité. Lorsque  $E_t = 0$ , on parle alors de loi de comportement sans tension [54].

Ce comportement unilatéral (dissymétrie entre la traction et la compression), voire sans tension, a été généralisé au 3D, notamment par V.H.Nguyen et al. [54]. La démarche sera présentée dans la troisième partie. En résumé, pour un matériau dont la densité d'énergie est une fonction des déformations principales, à chaque état de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , on peut calculer explicitement la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la matrice de comportement  $\underline{\underline{C}}$ .

Concernant les sous-couches d'une voie ferrée, les modèles 1D considèrent l'infrastructure comme un système de ressorts, dit fondation de Winkler. Dans les calculs en 2D et 3D, elle est souvent modélisée par un multicouche infini. Le comportement du sol est une fonction des matériaux employés dans les couches. V.H.Nguyen[54] a considéré divers modèles plus ou moins raffinés de sous-couches, intégrant des effets non-linéaires. Cependant, l'erreur que l'on introduit en utilisant des lois plus simples (élastiques, élastoplastiques parfaites de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager) n'est pas excessive par rapport à celle introduite par la méconnaissance des sols en place et leur état initial. En définitive, on peut supposer en première approximation que les lois élastiques suffisent pour représenter les sous-couches[54].

En fait, dans les applications ferroviaires, on utilisera plus généralement des lois élastiques, linéaires ou non.

**Cas élastique non-linéaire 3D :**

Les lois élastiques peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}}, t) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.4)$$

avec :

- $\underline{\underline{\sigma}}$  est la contrainte de Cauchy ; c'est un tenseur d'ordre 2 symétrique
- $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}}, t)$  est le tenseur de comportement ; c'est un tenseur d'ordre 4. Dans le cas linéaire, ce tenseur de comportement est un tenseur constant. Dans le cas non-linéaire, il dépend dans la plupart des modèles de la déformation.
- $\underline{\underline{\epsilon}}$  est le tenseur de déformation ; c'est un tenseur d'ordre 2 symétrique (par construction)

**Répartition de la charge en dessous des traverses** Sun et al. [83] ont proposé un modèle homogénéisé de voie ferrée. Cette "homogénéisation" partait du principe que la descente de charge n'était pas verticale mais conique. Le principe de cônes de charge suppose que la partie de ballast au-dessous des traverses travaille comme une barre de forme conique tronquée dont l'angle est celui du frottement interne (ils ont utilisé un angle de 20 degrés pour le ballast).

L'intérêt de cette approche est d'utiliser uniquement des modèles linéaires.

**Notion de bi-matériau pour le ballast**

Des approches de ce genre ont été développées au LAMI : elles consistaient à utiliser des codes éléments finis avec deux types de zones, les zones sous les traverses et les zones entre les traverses. Cela repose sur la même observation que le ballast sollicité sous les traverses offre plus de résistance que celui qui n'est pas chargé sous les traverses. En somme, cela agit comme si la rigidité du ballast non sollicité était différente et plus faible que celle du ballast sollicité. Des descentes de charge coniques ont d'abord été utilisées. Puis, à la suite des observations in situ sur le site d'expérimentation de la SNCF de La Pallud, et à la suite des simulations numériques menées par G.Saussine[69], la descente de charge a été imposée comme verticale. On verra l'intérêt de cette approche dans la partie purement numérique de ce travail.

**Modèles d'amortissement[60]**

L'apparition d'une boucle d'hystérésis (fig.4.1) au cours d'un cycle fermé de chargement met en évidence une dissipation d'énergie dans le matériau. Le terme d'amortissement matériel est utilisé pour décrire le processus de transformation de l'énergie mécanique du système en chaleur. C'est une grandeur importante pour les phénomènes vibratoires surtout au voisinage de la résonance afin de maintenir une amplitude de déplacement limitée.

Il existe en gros deux grands types de matériaux présentant de l'amortissement, ceux pour lesquels :

- l'énergie dissipée dépend de la vitesse de déformation. C'est le cas des matériaux visco-élastiques linéaires (polymères...)
- l'énergie dissipée ne dépend pas de la vitesse de déformation. C'est le cas des matériaux à amortissement hystérétique et à amortissement plastique (fort niveau de déformation) (sols, métaux...)

Deux grandeurs sont utilisées pour caractériser cet amortissement :

- l'énergie dissipée par cycle d'élément
- le rapport de cette énergie à une énergie élastique de référence

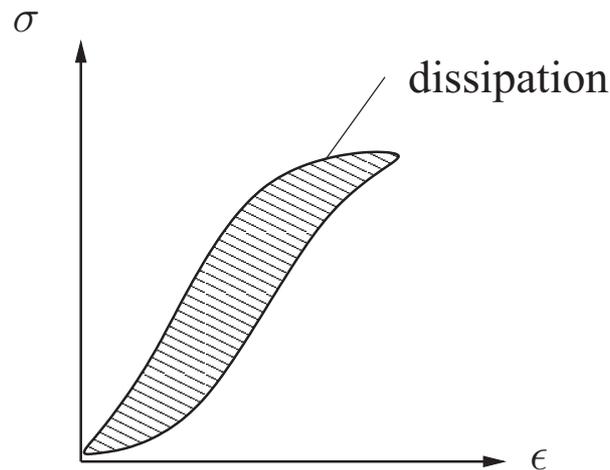


FIG. 4.1 – Boucle d’hystérésis d’un matériau visco-élastique au cours d’un cycle de charge-décharge

Les modèles visco-élastiques les plus utilisés sont ceux de Maxwell (un ressort et un amortisseur), et ceux de Kelvin-Voigt (un ressort et un amortisseur en parallèle).

L’amortissement a souvent une grande importance, mais on sait en général très mal l’évaluer et le modéliser. En plus, il dépend de la fréquence de sollicitation.

#### 4.1.1 Méthodes de résolution

Plusieurs méthodes existent : lorsque les calculs le permettent, des méthodes analytiques ou semi-analytiques sont employées. Elles s’appliquent en général à des géométries simples, à des modèles linéaires. Lorsque ce n’est pas le cas, d’autres méthodes, numériques celles-là peuvent être utilisées : la méthode des éléments finis, et la méthode des éléments frontières.

**Méthodes semi-analytiques** Ce sont des méthodes applicables à des problèmes linéaires et de géométrie simple. L’idée générale est de transformer ces équations dans le domaine fréquentiel. La solution est obtenue par la transformation de Fourier inverse qui est calculée en utilisant la technique de FFT et l’intégration numérique adaptative de Filon. La solution est validée en comparant avec la solution analytique dans le cas 2D. Une étude détaillée du modèle 2D est présentée dans la thèse de Leufeuvre-Mesgouez [45].

Ces méthodes semi-analytiques ont les avantages suivants par rapport à la méthode des éléments finis :

- pas besoin de créer un maillage
- pas de difficulté avec la solution à l’infini
- volume de calcul nettement moins important

Leurs inconvénients sont liés à la très grande simplicité des structures étudiées (il est très difficile d’étudier des structures complexes), ainsi qu’à l’exigence quasi-systématique de milieux linéaires.

Les méthodes semi-analytiques seront étudiées dans la partie 2 de ce mémoire dans les cas 1D et 3D.

**Eléments finis** La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation des milieux continus qui permet une résolution par un calcul numérique. Elle est particulièrement indiquée pour les géométries complexes, et les modèles de comportement non-linéaires. Malheureusement, les calculs sont généralement lourds et longs, en tout cas très dépendants du nombre de degrés de liberté (ddl). Dans un cas élastique (linéaire ou non), l'équation dynamique en éléments finis est établie en discrétisant la formulation variationnelle de Galerkin. Cela donne le système suivant :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}}(t) + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}}(t) + \underline{\underline{K}}\underline{U}(t) = \underline{F}(t) \quad (4.5)$$

$$\underline{U}(t=0) = \underline{U}_0; \dot{\underline{U}}(t=0) = \dot{\underline{U}}_0 \quad (4.6)$$

où :  $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de masse,  $\underline{\underline{C}}$  la matrice d'amortissement,  $\underline{\underline{K}}$  la matrice de rigidité,  $\ddot{\underline{U}}$  l'accélération,  $\dot{\underline{U}}$  la vitesse, et  $\underline{U}$  le déplacement.

Pour la résolution d'un tel système, on peut soit utiliser la méthode de superposition modale, soit des schémas d'intégration numériques (Newmark, Wilson...). La méthode de superposition modale repose sur des propriétés d'algèbre linéaire. Par conséquent, elle ne pourra être utilisée que dans les cas de modélisations linéaires. Les schémas d'intégration numériques sont employés dans tous les cas : la principale restriction vient de la taille des calculs. Dans les cas non-linéaires, plusieurs difficultés surviennent : d'une part la taille du maillage (et donc le nombre de ddl<sup>1</sup>) doit être suffisamment grande pour permettre d'atteindre le régime permanent sous l'action de la charge mobile ; d'autre part, les non-linéarités réclament en général des zones finement maillées ; enfin le pas de temps doit également être suffisamment petit pour assurer la stabilité.

L'analyse par éléments finis de la propagation des ondes dans un domaine infini pose deux problèmes majeurs[54] :

- D'abord, la structure doit être discrétisée de telle sorte que les ondes puissent se propager, c'est à dire avec un maillage suffisamment fin : la taille des éléments doit être plus petite que la longueur d'onde.
- Ensuite, comme on ne peut modéliser la structure que de manière finie, des frontières artificielles sont introduites pour permettre de décrire l'influence des domaines extérieurs.

Les études sont très nombreuses sur le sujet des éléments finis. En dynamique, dans le cas d'un calcul dans un repère fixe, on pourra s'intéresser dans le cas 1D par exemple aux travaux de Rieker et al. [68], et dans le cas 3D aux travaux d'Ekevid et al.[28]. Dans un repère mobile, on se limite en général aux vitesses subsoniques. On peut alors citer par exemple les travaux d'Andersen et al. [7] ou de Nguyen et al.[56].

V.H.Nguyen a d'ailleurs comparé [54] les méthodes de calcul dans un repère fixe et dans un repère mobile. Sa conclusion était la suivante : même si le calcul dans le repère fixe est beaucoup plus lourd (nombre de ddl nécessairement plus grand), il vaut mieux toujours utiliser ce type de calcul, car il sera plus facile d'introduire des irrégularités dans les voies (défauts de rail). En plus le calcul dans le repère fixe permet d'introduire plus facilement des lois de comportement non-linéaires.

Comme on l'a indiqué plus haut, le maillage des éléments finis est limité à un domaine fini. Se pose alors la difficulté de la réflexion des ondes sur les frontières, phénomène dû à la modélisation. La résolution de cette difficulté passe généralement par la condition de radiation qui impose qu'il n'y ait pas d'énergie venant de l'infini. Les solutions sont multiples : domaine de calcul très grand, systèmes ressort-amortisseurs pour les fréquences dominantes, méthodes mixtes éléments finis/méthode des éléments de frontière[15]...

<sup>1</sup>degrés de liberté

Mais on y reviendra dans la partie 3 de ce mémoire.

**Utilisation de la périodicité des traverses :** Certains auteurs (comme Belotserkovskiy [12] ou Heck [36]) ont tiré parti de la géométrie périodique de la voie ferrée en utilisant notamment le théorème de Bloch[6]<sup>2</sup>. Dans des cas 1D, une solution analytique/semi-analytique peut être mise en évidence ([12]). Pour les cas 3D, des méthodes numériques fondées sur la décomposition modale existent. D'ailleurs, la SNCF utilise DYNAVOIE, un logiciel qui utilise cette périodicité avec des méthodes de décomposition modale.

## 4.2 Méthode des éléments discrets

Le ballast est considéré comme un ensemble d'éléments discrets, chaque élément étant indéformable sauf aux points de contact. Dans les algorithmes d'intégration numérique, la difficulté vient de la détection des contacts pour chaque particule à chaque pas de temps ([59]).

En prenant un pas de temps de calcul suffisamment petit dans la simulation numérique, les ondes ne peuvent pas se propager entre les grains voisins, et la vibration d'une particule ne dépend que des forces de contact([95]).

Le problème des ondes à l'intérieur des particules n'est pas vraiment étudié. La propagation des ondes dans un paquet de grains est considérée comme la propagation des contraintes aux points de contact.

Deux grandes méthodes sur les éléments discrets existent : la dynamique moléculaire et la dynamique des contacts.

### 1. Dynamique des contacts (DC)

Cette méthode a été mise au point par J.J.Moreau[49] et M.Jean[39]. Les contacts sont considérés comme des percussions quasi-instantanés, la percussion étant l'intégrale des forces de contact le temps de la collision (très court). Du fait de la grande brièveté, des variations brutales de la vitesse et des forces de contact surviennent entre l'avant et l'après choc. Cette non-régularité explique le caractère fortement non-linéaire du comportement d'un assemblage granulaire.

La méthode DC consiste à résoudre l'équation de Lagrange ci-dessous :

$$\underline{\underline{M}}(t, \underline{q}) \underline{\underline{\ddot{q}}} = \underline{\underline{F}}(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) + \underline{\underline{F}}_c \quad (4.8)$$

où :

- $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de masse
- $\underline{\underline{F}}$  représente l'ensemble des forces extérieures appliquées au système
- $\underline{\underline{F}}_c$  sont les forces de contact
- $\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{\ddot{q}}$  sont la position, la vitesse et l'accélération des grains
- $t$  est le temps.

<sup>2</sup>Si on a  $E_p(\underline{x} + \underline{R}) = E_p(\underline{x})$ , où  $E_p$  désigne l'énergie potentielle d'une particule,  $\underline{R}$  appartenant au réseau de Bravais, alors les états propres de l'Hamiltonien peuvent être choisis sous forme d'ondes planes que multiplient une fonction ayant la périodicité du réseau de Bravais. Cela s'écrit :

$$\underline{U}(\underline{x} + \underline{R}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{R}} \underline{U}(\underline{x}) \quad (4.7)$$

On notera que ce théorème de Bloch s'appelle théorème de Floquet dans le cas 1D.

Les particules sont représentées comme rigides, non interpénétrables. Elles peuvent interagir au contact d'un frottement sec (Coulomb par exemple). Le contact est décomposé en une composante normale (force de répulsion représentée par le graphe de Signorini) et une composante tangentielle (représenté par le graphe de Coulomb). Soient  $\delta_{ij}$  la distance entre les deux grains  $i$  et  $j$ , et  $R_{ij}$  la composante normale de la force de contact entre  $i$  et  $j$ , les conditions de Signorini s'écrivent :

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 0 \implies R_{ij} \geq 0 \\ \delta_{ij} &> 0 \implies R_{ij} = 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

**Remarque :** le cas  $\delta_{ij} < 0$  ne se produit jamais avec cette méthode qui considère les grains comme rigides.

Soient  $v_t$  et  $v_n$  les vitesses relatives tangentielle et normale entre  $i$  et  $j$ ,  $T_{ij}$  la composante tangentielle de la force de contact entre  $i$  et  $j$ , et  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb. Les conditions de Coulomb s'écrivent :

$$\begin{aligned}v_t &\leq 0 \implies T_{ij} = \mu R_{ij} \\ v_t &> 0 \implies T_{ij} = -\mu R_{ij}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Comme les collisions sont supposées instantanées, il en résulte une discontinuité de la vitesse et des forces de contact. Les groupes d'équations 4.9 et 4.10 offrant des relations de complémentarité entre les vitesses et les efforts donnent un critère sur la persistance ou non d'un contact. On a :

- si  $\delta_{ij} > 0$  alors :  $R_{ij} = 0$  et en plus il n'y a pas de contact
- si  $\delta_{ij} = 0$  alors :

- (a) si  $v_n > 0$  et  $R_{ij} = 0$  : le contact est rompu, il n'exerce plus de force
- (b) si  $v_n = 0$  et  $R_{ij} \geq 0$  : le contact se maintient

L'enjeu de ces relations de complémentarité est de poser le problème de la discontinuité avant-après le contact. Ce problème est résolu en introduisant une sorte de vitesse moyenne qui mêle les vitesses avant et les vitesses par le biais de coefficients de restitution.

Cette méthode permet de gérer quelques milliers de grains simultanément.

## 2. Dynamique moléculaire

Cundall[25] a initié cette méthode pour la mécanique des roches. Les hypothèses de cette méthode sont les suivantes :

- les grains sont rigides, mais autorisent une faible interpénétration lors des contacts
- l'interpénétration est reliée aux forces de contact par des lois locales de comportement
- les conditions de glissement entre les grains sont donnés par la relation de Mohr-Coulomb.

Dès la détection du contact, les grains sont reliés entre eux par des relations de ressorts et d'amortisseurs. Le système différentiel à résoudre pour chaque grain est un système différentiel de la forme suivante :

$$\ddot{\underline{X}} = \frac{\underline{F} + \underline{P}}{m} \quad (4.11)$$

$$\dot{\underline{W}} = \frac{\underline{M}}{I} \quad (4.12)$$

où :

- $\ddot{X}$  est l'accélération de la particule (en  $m.s^{-2}$ ),
- $F$  est le bilan des forces qui s'y appliquent (en  $N$ ),
- $P$  désigne son poids (en  $N$ ),
- $m$  désigne sa masse (en  $kg$ ),
- $W$  est la vitesse angulaire de rotation (en  $s^{-1}$ )
- $M$  est le moment des forces appliquées à la particule (en  $N.m = kg.m^2.s^{-2}$ )
- $I$  est le moment d'inertie du grain (en  $kg.m^2$ )

Les méthodes numériques pour résoudre ce genre de schéma sont relativement nombreuses : schéma des différences finies centrées, Runge-Kutta, Euler explicite... Dans la résolution, des erreurs peuvent survenir dès que le pas de temps devient trop grand. Le pas de temps d'une manière générale doit être adapté, de telle sorte que la perturbation provoquée par un contact ne se propage qu'aux particules directement voisines en contact.

Ces méthodes purement "discrètes" sont sans doute les méthodes les plus rigoureuses. Cependant, il faut identifier les coefficients (amortissement, restitution), et également détecter "les contacts". Le temps de calcul peut être important surtout aux hautes fréquences.

**Formulation de Hertz** Le contact de Hertz est un contact de deux sphères élastiques sans frottement. Il suppose des déformations localisées petites par rapport aux tailles des sphères. L'interaction normale (dans l'axe liant les deux centres de gravité) est de la forme :

$$F_H = -k_n \delta^{\frac{3}{2}} \quad (4.13)$$

avec :

- $k_n$  est la constante de rigidité normale
- $\delta$  est l'interpénétration entre les deux sphères (fig.4.2), ie la distance d'enfoncement d'une sphère dans l'autre

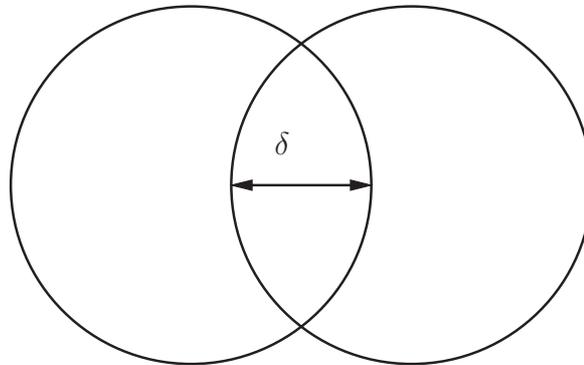


FIG. 4.2 – Interpénétration de deux sphères (représentées en coupe) pour le modèle de Hertz

D'ailleurs, la constante de rigidité normale peut s'écrire en fonction du module d'Young homogénéisé  $E^*$  et du rayon équivalent  $R^*$  par la relation suivante :

$$k_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \quad (4.14)$$

Les deux grandeurs homogénéisées  $E^*$  et  $R^*$  s'écrivent en fonction des grandeurs locales des sphères  $i$  et  $j$  :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \quad (4.16)$$

Dans le cadre de mon travail, les grains sont tous identiques du point de vue des caractéristiques mécaniques et géométriques. On a :

$$R^* = \frac{d}{2} \quad (4.17)$$

$$E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \quad (4.18)$$

De plus, la force d'interaction peut s'écrire aussi :

$$F_H = -k_n \delta^{\frac{1}{2}} \delta \quad (4.19)$$

En utilisant :  $\sigma_H d^2 \approx F_H$ , il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_H &= -\frac{k_n \delta^{\frac{1}{2}} \delta}{d} \frac{\delta}{d} \\ &= -K(\delta) \epsilon \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cela revient à faire porter la non linéarité par le coefficient  $K$  :

$$\begin{aligned} K(\delta) &= \frac{k_n \delta^{\frac{1}{2}}}{d} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{d}} \frac{E}{1 - \nu^2} \delta^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

**Répartition des grains sur un réseau** Ce paragraphe fait référence aux travaux de Suiker. Afin d'éviter le travail de la détection du contact entre les grains, Suiker a postulé que les grains se répartissaient sur un réseau 2D. Cette approche peut sembler un peu intermédiaire entre les méthodes purement discrètes (elle introduit le diamètre du grain de ballast dans le modèle), et les méthodes continues (position identifiée pour chaque grain).

C'est cette approche qui a été utilisée dans ce travail : elle sera développée dans la partie suivante.

### 4.3 Charge mobile et dynamique des structures

Pour des raisons de simplicité, on travaille dans cette section dans un domaine élastique linéaire isotrope. La loi de comportement entre le tenseur des contraintes ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) celui des déformations ( $\underline{\underline{\epsilon}}$ ) et le tenseur identité ( $\underline{\underline{1}}$ ) s'écrit classiquement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.22)$$

avec :  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Ils sont reliés au module d'Young ( $E$ ) et au coefficient de Poisson ( $\nu$ ) par les deux relations suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.23)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.24)$$

Classiquement, dans ce cas de modèle élastodynamique linéaire isotrope, on peut utiliser la relation élastodynamique de Navier suivante :

$$\mu\Delta(\underline{u}) + (\lambda + \mu)\underline{grad}(\text{div}(\underline{u})) = \rho\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} \quad (4.25)$$

En l'absence de conditions aux limites, on décompose usuellement les ondes en deux parties de natures différentes : une onde scalaire de compression et une onde vectorielle de cisaillement. Ces deux ondes, représentées par les deux potentiels de Lamé  $\phi$  et  $\underline{\psi}$ , permettent d'écrire simplement la solution en déplacement :

$$u(\underline{x}, t) = \underline{grad}(\phi) + \underline{rot}(\underline{\psi}) \quad (4.26)$$

En remplaçant cette expression dans 4.25, on obtient les deux équations d'ondes suivantes :

$$\Delta(\phi) - \frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.27)$$

$$\Delta(\underline{\psi}) - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\underline{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.28)$$

avec :

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (4.29)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.30)$$

La propagation des ondes de compression est due aux efforts de traction/compression des faces perpendiculaires au mouvement. Cette onde  $P$  survient le long de la sollicitation des particules. Pour les ondes de cisaillement (ondes  $S$ ), la propagation s'effectue perpendiculairement à la direction de sollicitation. On notera qu'on a toujours :  $c_s < c_p$  car  $\nu > 0$ .

Sur une surface libre, des perturbations surviennent sous l'effet de phénomènes de réflexion et de réfraction [45]. Ces "ondes de surface"(ondes de Rayleigh) sont des ondes très localisées au voisinage de la surface, et maximale sur celle-ci. La célérité de ces ondes( $C_R$ ) vérifie l'équation suivante :

$$\left(2 - \left(\frac{C_R}{c_s}\right)^2\right)^2 + 4\left(1 - \frac{C_R}{c_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{C_R}{c_s}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.31)$$

Lorsque les milieux à étudier ne sont plus aussi simples que le milieu semi-infini continu linéaire élastique homogène isotrope, l'analyse précédente est beaucoup plus complexe. La réponse dynamique repose alors soit sur une intégration numérique, soit sur une analyse en modes propres.

On peut distinguer différents régimes relatifs à la vitesse de la charge. Notons  $C_R$ ,  $C_S$  et  $C_P$  les vitesses de Rayleigh (onde de surface), de cisaillement, et de pression. Les régimes subrayleigh, superrayleigh, subsonique, transsonique, supersonique peuvent être analysés. On remarquera que le régime supersonique est atteint plus facilement (avec les désordres corrélaires) pour des sols mous que pour les sols rigides.

Pour une source mobile constante sur un demi-espace 3D, les solutions obtenues montrent deux cônes de Mach correspondant aux ondes P et S [31]4.3.

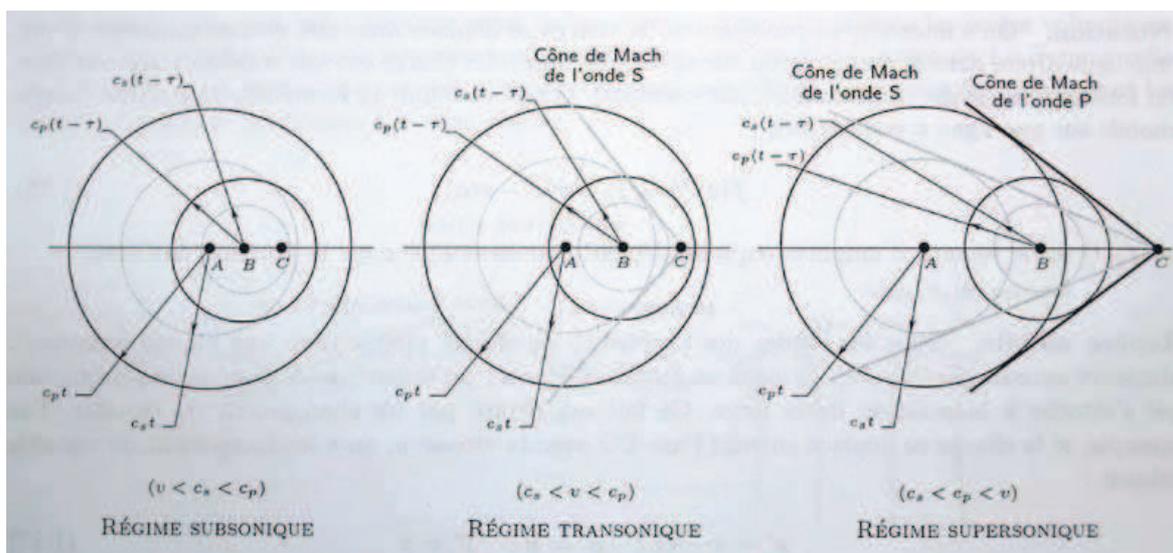


FIG. 4.3 – Trois régimes d'une charge mobile[55]

Dès qu'il y a plusieurs charges, il y a présence d'interférences constructives et destructives [45], et apparition d'une vitesse critique (égale dans la plupart des cas à la vitesse de Rayleigh) qui diminue lorsque la profondeur de la couche élastique augmente.

Dans le cas 1D, Fryba [31] a montré l'existence d'une vitesse critique à laquelle la résonance apparaît. Elle dépend de la densité et de la rigidité en flexion de la poutre, mais également de la rigidité de la fondation. La vitesse critique augmente quand la rigidité de la fondation augmente.

## 4.4 Conclusion

Afin d'interpréter, de comprendre les phénomènes qui se passent lorsqu'on utilise le banc d'essai à échelle un tiers, une modélisation s'impose. Les méthodes employées sont diverses : approches numériques continues (éléments finis, éléments de frontière), numériques discrètes (dynamique moléculaire, dynamique des contacts), analytiques ou semi-analytiques discrètes ou continues (résolutions directes, utilisation de la transformée de Fourier ou d'une autre transformée). La nature granulaire du ballast pousse a priori à utiliser des méthodes discrètes pour le modéliser : le temps de calcul et la difficulté à modéliser des structures complexes sont les obstacles majeurs de ces méthodes. D'un autre côté, le ballast est un matériau relativement cohérent grâce aux frottements causés par sa rugosité : une modélisation continue, plus simple, paraît par ce raisonnement suffire. Et d'ailleurs, il suffit globalement pour modéliser les couches en-dessous dudit ballast.

Toutefois, des études numériques montrent l'importance de la modélisation discrète, et en particulier du diamètre moyen des grains.

Récemment, SUIKER et al.[79] a intégré dans une approche 2D (monocouche reposant sur un sol rigide) semi-analytique une distance caractéristique : les grains, contrairement à une modélisation discrète classique, sont répartis sur un réseau. Ils vibrent autour de leur position d'équilibre. En ce sens, la modélisation est proche d'une modélisation continue.

Comme un des objectifs de cette thèse est de déterminer l'importance d'une sous-couche sur

le mouvement du ballast, il fallait introduire cette sous-couche. Pour simplifier, de modèles 1D (pour voir la faisabilité et la pertinence) et 3D mixtes discret (ballast)/continu (sous-couche) linéaires ont été construits sur des bicouches. La généralisation à un multicouche est facile s'il s'agit d'une couche discrète reposant sur un multicouche continu.

# Conclusion et bilan de la partie bibliographique

Une voie ferrée est un matériau multi-couche hétérogène, difficilement homogénéisable du moins pour la couche de ballast à cause du faible nombre de grains dans le sens vertical, et périodique par sa répartition des traverses.

Les voies ferrées se dégradent habituellement sous l'action de nombreux facteurs (gel, structure du sol, masse et fréquence de passage des trains), et surtout de la vitesse de déplacement des trains.

La mesure de la dégradation in situ permet de déclencher la maintenance (bourrage ou renouvellement complet par exemple) de la voie en fonction de seuils réglementaires. Il nous faut optimiser ces opérations de maintenance, et en particulier anticiper la dégradation des voies ferrées en fonction des sollicitations prévisibles qui vont s'y appliquer.

Pour cela la démarche poursuivie jusqu'à présent consiste à élaborer des modèles expérimentaux à partir d'essais réalisés sur des bancs ad hoc (milieux maîtrisés) : pour des raisons d'encombrement l'échelle réduite a été privilégiée, mais les lois de comportement devront être vérifiées sur des bancs à échelle réelle. Cela confirmera la validité des règles de similitudes élaborées jusqu'ici.

L'incrément de tassement, facteur déterminant de la maintenance peut, grâce à des lois expérimentales être relié non seulement à la déflexion, mais aussi à l'accélération et à la dispersion de l'accélération des traverses.

Il nous reste à trouver, à l'issue de ce survol bibliographique, des lois qui permettent de trouver la valeur de cette accélération en fonction de la vitesse de déplacement du train et de la structure du sol. Ces lois font l'objet de la modélisation semi-analytique de la partie 2, mais également de la construction numérique de la partie 3.

Il nous faut entre autres déterminer si le ballast a un comportement discret ou si une modélisation continue suffit ; est-ce qu'une approche unilatérale est pertinente compte tenu de sa nature granulaire ?

Une autre contrainte est le caractère utilisable en suffisamment peu de temps : le temps de calcul aura évidemment un rôle.



## **Deuxième partie**

### **Etudes semi-analytiques 1D et 3D**



# Introduction de la partie semi-analytique

Comme on l'a indiqué dans le chapitre précédent, l'enjeu principal de notre travail réside dans le calcul des accélérations et des déplacements dans la structure de la voie ferrée.

La principale difficulté est la nature même du ballast : matériau granulaire discret ? Matériau non-linéaire ? Le but de cette partie est de déterminer si la nature discrète du ballast peut transparaître au travers d'approches linéaires simples analytiques ou semi-analytiques.

Les méthodes classiques de corps discrets sont la dynamique moléculaire et la dynamique des contacts : les solutions sont complexes et purement numériques avec des temps de calcul relativement longs. Dans le cas d'un milieu continu, si la structure est simple, on a parfois des solutions analytiques ou semi-analytiques. Si la structure est plus complexe, on utilise principalement la méthode des éléments finis.

Suiker[79] dans un cas 2D a introduit une méthode hybride : les grains sont modélisés par des interactions linéaires sur une structure prédéterminée. Même si elle ne permet pas de suivre des réarrangements de grains et d'étudier des comportements non-linéaires, d'une part les temps de calcul sont relativement faibles, et d'autre part des effets discrets (dépendant de la taille des grains) ont été mis en évidence. De plus, une atténuation des hautes fréquences a été constatée, conformément aux observations.

Ainsi, on tâchera dans cette partie d'introduire la même méthodologie que celle de Suiker[79], mais en remplaçant la sous-couche (modélisant la plate-forme) rigide [79] par une sous-couche ayant des caractéristiques analogues à celles de la couche supérieure (modélisant le ballast).

Pour expérimenter cette démarche d'interaction, on va dans un premier temps utiliser des modélisations 1D dans le chapitre 4. La couche supérieure sera un milieu discret alors que la couche inférieure sera un milieu continu. Ce bicouche mixte discret-continu 1D sera comparé à un bicouche purement continu.

Dans un second temps, on étendra la méthode à un cas 3D dans le chapitre 5 sur un bicouche également mixte discret-continu. Les questions seront les suivantes : peut-on montrer des différences de résultats entre les approches "bicouche continu/continu" et "bicouche mixte discret/continu" ? Est-ce que ces différences sont cohérentes avec la nature discrète du ballast ?



# Chapitre 5

## Construction d'un modèle 1D mixte discret-continu

### 5.1 Introduction

Comme on l'a indiqué dans l'introduction de la partie 2 "Approches semi-analytiques", l'idée de ce chapitre est de construire deux modèles de bicouches 1D : l'un continu/continu, l'autre discret/continu. On a voulu commencer par un cas 1D pour des raisons de simplicité de résolution. L'avantage du 1D est entre autres la simplicité de mise en place d'une démarche multi-couches. On a ainsi entrepris de tester la nature discrète du ballast par comparaison avec des modèles continus classiques.

La réponse dynamique à une sollicitation sinusoïdale nous permettra de déterminer la différence entre une représentation granulaire du ballast et une représentation continue : est-ce que des effets "discrets" (dépendant du diamètre du grain du ballast, du contraste des raideurs ou de la fréquence de sollicitation) peuvent être mis en évidence ?

Les modèles étudiés sont les suivants : d'une part un matériau bicouche 1D continu/continu, et d'autre part un bicouche 1D mixte discret/continu sous l'action d'une force  $F(t)$ .

### 5.2 Modèle continu/continu

#### Notations :

Par défaut, les grandeurs sans indice seront valables pour les deux couches, celles avec l'indice 1 seront valables pour la couche supérieure, tandis que celles de la couche inférieure seront affectées de l'indice 2.

Pour établir les équations qui régissent les comportements des deux couches continues 1D, on utilise les équations élastodynamiques de Navier (3D) : le modèle 1D est considéré comme un modèle dégénéré du modèle 3D modulo certaines hypothèses développées dans cette section. De cette façon, on espère obtenir des grandeurs comparables entre le cas 1D traité ici, et le cas 3D qui nous intéresse au final (cf. chapitre suivant).

### 5.2.1 Position du problème

Le problème à résoudre est le cas d'un bicouche 1D semi-infini dont la couche supérieure, représentant la ballast, et d'épaisseur  $h$  est soumise à la surface à l'action d'une charge oscillante  $F(t)$  verticale.

Les lois de comportement sont linéaires élastiques continues. Soient  $E_1$  et  $E_2$  les modules d'Young des deux couches.

Les conditions aux limites seront :

- à la surface, on a la continuité de la charge.
- A l'interface, on considère qu'il y a continuité des déplacements et des forces (pas de glissement par exemple).
- A l'infini, on impose la condition de radiation (déplacement nul à l'infini).

La démarche va être la suivante : on considère deux parallélépipèdes rectangles de dimensions à la base  $\alpha$  et  $\alpha$  (directions  $x$  et  $y$ ), et de hauteurs  $h$  et infinie (cf.fig.5.1). Comme le modèle en construction est un modèle 1D dans le sens vertical, les longueurs dans les autres directions (comme  $\alpha$ ) demeureront très petites.

### 5.2.2 Recherche des équations

#### 5.2.2.1 Rappel des équations classiques de la mécanique

Ces équations classiques 3D seront valables sans distinction dans les deux couches.

- Loi fondamentale de la dynamique :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma}) + \underline{f} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

où :  $\underline{\sigma}$  désigne le tenseur de Cauchy des contraintes,  $\underline{f}$  les forces volumiques,  $\rho$  la masse volumique, et  $\underline{u}$  le déplacement.

- Loi de comportement élastique linéaire générale (puis appliquée à un cas isotrope) :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + \mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (5.2)$$

où :  $\underline{\underline{C}}$  désigne le tenseur d'ordre 4 représentant le comportement élastique linéaire le plus général,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  le tenseur des déformations,  $\lambda$  et  $\mu$  les facteurs de Lamé, et  $\underline{\underline{1}}$  le tenseur identité.

- Relation de compatibilité

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u}) + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{u})] \quad (5.3)$$

- Condition surfacique à la limite :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \underline{df} \quad (5.4)$$

où :  $\underline{n}$  est la normale sortante du milieu,  $dS$  l'élément de surface sur lequel on calcule la contrainte, et  $\underline{df}$  la force élémentaire résultante.

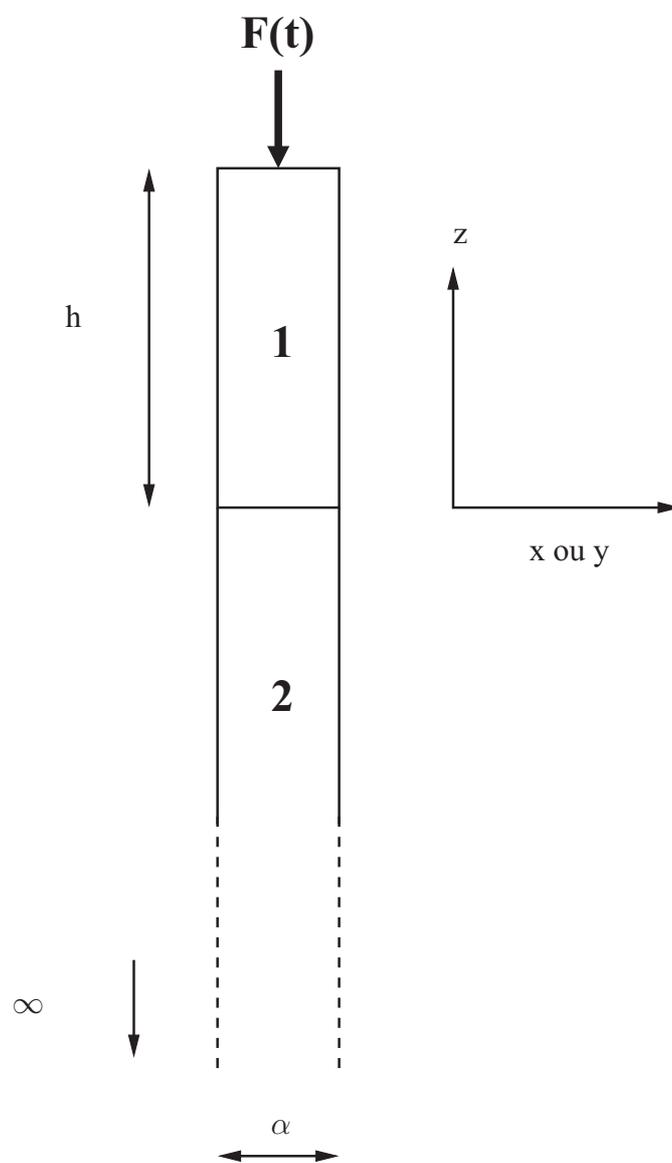


FIG. 5.1 – Construction d'un modèle 1D : deux parallélépipèdes rectangles en coupe l'un sur l'autre

### 5.2.2.2 Etude de la couche supérieure

**Hypothèse :** On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'effets de Poisson. La loi de comportement peut donc être simplement exprimée entre la contrainte et la déformation par une relation de proportionnalité de facteur  $E$ , le module d'Young :

$$\underline{\underline{\sigma}} = E \underline{\underline{\epsilon}} \quad (5.5)$$

Considérons le parallélépipède rectangle de la figure (5.1) de dimensions  $h$  (la hauteur de la couche supérieure), et  $\alpha$  dans les deux directions  $x$  et  $y$ .

Comme on l'a rappelé dans le paragraphe sur la position du problème, la longueur  $\alpha$  est très faible. Par conséquent, il est raisonnable de supposer que **les contraintes et les déformations varient très peu selon une section dans un plan (x,y)** : les dérivées par rapport à  $x$  ou  $y$  seront donc nulles.

Donc, l'expression de la divergence de la contrainte de Cauchy devient : avec :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sigma_{xz,z} \\ \sigma_{yz,z} \\ \sigma_{zz,z} \end{bmatrix}$$

**Remarque :** la notation avec une virgule en indice suivi d'une lettre, par exemple  $z$ , signifie qu'on effectue une dérivation par rapport à la grandeur en indice ( $z$ ).

A l'aide de la relation de compatibilité (Eq.5.3), les valeurs des déformations sont de la même manière :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = 0 \quad (5.6)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{u_{x,z}}{2} \quad (5.7)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{u_{y,z}}{2} \quad (5.8)$$

$$\epsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

La loi de comportement (5.2), compte tenu de ces simplifications nous donne :

$$\forall i \in \{x, y, z\}, \sigma_{iz} = E u_{i,z} \quad (5.11)$$

La seule force volumique dont on ait à tenir compte est la gravité, qui s'exprime :  $\underline{f} = +g \underline{e}_z$  (le signe "+" vient de la convention de signe vers le bas). On obtient le système suivant (5.1) :

$$E u_{x,zz} = \rho u_{x,tt} \quad (5.12)$$

$$E u_{y,zz} = \rho u_{y,tt} \quad (5.13)$$

$$E u_{z,zz} + g = \rho u_{z,tt} \quad (5.14)$$

On notera que les trois équations précédentes sont des équations classiques de D'Alembert.

Comme on est dans le cas d'une approche linéaire, il n'est pas important de considérer la force volumique de gravité dans l'étude des oscillations. Par un changement de variable adapté, l'expression de la force de gravité disparaît.

**Démonstration :**

Cette démonstration revient à dire que la gravité n'intervient pas dans la perturbation dynamique autour de l'équilibre statique.

La gravitation n'intervient que dans le mouvement vertical dans l'équation suivante :

$$Eu_{z,zz} + g = \rho u_{z,tt} \quad (5.15)$$

On recherche un  $u_z^{part}$  particulier pour notre changement de variable. La valeur suivante convient :

$$u_z^{part} = -\frac{1}{2}gz^2 + \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.16)$$

On pose :

$$v_z = u_z - u_z^{part} \quad (5.17)$$

L'équation de D'Alembert devient donc :

$$Ev_{z,zz} = \rho v_{z,tt} \quad (5.18)$$

Afin d'éviter de compliquer les notations, on effectue le changement de variable, mais on va laisser les mêmes notations. Le système à résoudre devient donc :

$$Eu_{x,zz} = \rho u_{x,tt} \quad (5.19)$$

$$Eu_{y,zz} = \rho u_{y,tt} \quad (5.20)$$

$$Eu_{z,zz} = \rho u_{z,tt} \quad (5.21)$$

Ce système est, grâce aux hypothèses, réduit à un système où les variables sont découplées. Comme on construit dans ce chapitre un modèle à une dimension, on ne s'intéressera qu'à l'équation (5.21).

**Equation de dispersion :**

L'équation de dispersion est la relation qui lie la pulsation spatiale ( $K$ ) à la pulsation temporelle ( $\omega$ ). (5.21) permet de trouver l'équation de dispersion. Pour cela on postule une solution sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique :

$$u_z(z, t) = Ae^{i(\omega t - Kz)} \quad (5.22)$$

En remplaçant l'expression (5.22) de cette solution dans l'équation (5.21), on a :

$$-EK^2 Ae^{i(\omega t - Kz)} = -\rho\omega^2 Ae^{i(\omega t - Kz)} \quad (5.23)$$

$$\iff EK^2 = \rho\omega^2 \quad (5.24)$$

On peut observer sur cette équation de dispersion (5.24), c'est qu'a priori, il n'y a pas de zones de fréquences interdites.

**5.2.2.3 Couche inférieure**

Pour la couche inférieure, les équations sont exactement les mêmes. Il suffit d'ajouter un indice "2" sur toutes les relations définies pour la couche supérieure.

**5.2.2.4 Conditions aux limites**

1. Sur la surface, on utilise (5.4) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{ndS} = \underline{df} \quad (5.25)$$

$$\implies -\sigma_{zz1}(z=0, t)\alpha^2 = a \sin(\Omega t) \quad (5.26)$$

2. A l'infini (condition de radiation), on a :

$$\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} + ik_2 z = 0 \quad (5.27)$$

$$\underline{u}_2(z \rightarrow +\infty, t) = \underline{0} \quad (5.28)$$

$$\implies u_{z2}(z \rightarrow +\infty, t) = 0 \quad (5.29)$$

3. A l'interface, on considère qu'il y a continuité du déplacement et des forces :

$$u_{z1}(z = h, t) = u_{z2}(z = h, t) \quad (5.30)$$

$$\underline{df}_1 = \underline{df}_2 \quad (5.31)$$

### 5.2.3 Résolution

On va chercher des solutions sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques. Considérons l'équation (5.24). Cette équation de dispersion indique que la solution en déplacement est a priori la somme de deux ondes se propageant en sens contraires<sup>1</sup> :

$$u_z(z, t) = B e^{i(\omega t - Kz)} + C e^{i(\omega t + Kz)} \quad (5.32)$$

En utilisant les relations de compatibilité et la loi de comportement, on obtient (vrai pour les deux milieux) :

$$\epsilon_{zz}(z, t) = -iK [B e^{i(\omega t - Kz)} - C e^{i(\omega t + Kz)}] \quad (5.33)$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = -iEK [B e^{i(\omega t - Kz)} - C e^{i(\omega t + Kz)}] \quad (5.34)$$

En posant :  $b = \frac{a}{\alpha^2}$ , on a **à la surface** :

$$-\sigma_{zz1}(z = 0, t) \alpha^2 = a e^{i(\Omega t)} \quad (5.35)$$

$$\iff \forall t, iE_1 K_1 [B_1 - C_1] e^{i(\omega_1 t)} = b e^{i(\Omega t)} \quad (5.36)$$

$$\iff \omega_1 = \Omega, iE_1 K_1 [B_1 - C_1] = b \quad (5.37)$$

**A l'infini**, le déplacement devient nul. Cela revient à écrire "qu'il n'y a pas d'onde venant de l'infini pour la couche inférieure". Il vient :

$$u_{z2}(z, t) = B_2 e^{i(\omega_2 t - K_2 z)} + C_2 e^{i(\omega_2 t + K_2 z)} = C_2 e^{i(\omega_2 t + K_2 z)} \quad (5.38)$$

Ci-dessus, compte tenu des conventions de signe, on a bien sélectionné la solution plane progressive vers les z décroissants (axe vers le haut).

**La continuité des déplacements à l'interface (z=h) donne :**

$$u_{z1}(z = h, t) = u_{z2}(z = h, t) \quad (5.39)$$

$$\iff \forall t, B_1 e^{i(\omega_1 t - K_1 h)} + C_1 e^{i(\omega_1 t + K_1 h)} = B_2 e^{i(\omega_2 t - K_2 h)} \quad (5.40)$$

$$\iff \omega_1 = \omega_2, B_1 e^{-i(K_1 h)} + C_1 e^{i(K_1 h)} = B_2 e^{-i(K_2 h)} \quad (5.41)$$

**La continuité des forces à l'interface (z=h) donne :**

$$\underline{df}_1 = \underline{df}_2 \quad (5.42)$$

$$\iff -E_1 K_1 [B e^{-i(K_1 h)} - C_1 e^{i(K_1 h)}] = -E_2 K_2 B_2 e^{-i(K_2 h)} \quad (5.43)$$

<sup>1</sup>On pouvait le savoir directement à partir des équations de D'Alembert.

Ainsi, on a trois inconnues ( $B, C, B_2$ ), pour les trois équations suivantes :

$$-E_1 K_1 [B_1 e^{-i(K_1 h)} - C_1 e^{i(K_1 h)}] = E_2 K_2 B_2 e^{-i(K_2 h)} \quad (5.44)$$

$$B_1 e^{-i(K_1 h)} + C_1 e^{i(K_1 h)} = B_2 e^{-i(K_2 h)} \quad (5.45)$$

$$iE_1 K_1 [B_1 - C_1] = b \quad (5.46)$$

Après calculs, les solutions sont :

$$B_1 = \frac{b}{iE_1 K_1} \left[ 1 - \frac{(E_2 K_2 + E_1 K_1) e^{-iK_1 h}}{(E_2 K_2 + E_1 K_1) e^{-iK_1 h} + (E_2 K_2 - E_1 K_1) e^{iK_1 h}} \right] \quad (5.47)$$

$$C_1 = -\frac{b}{iE_1 K_1} \frac{(E_2 K_2 + E_1 K_1) e^{-iK_1 h}}{(E_2 K_2 + E_1 K_1) e^{-iK_1 h} + (E_2 K_2 - E_1 K_1) e^{iK_1 h}} \quad (5.48)$$

$$B_2 = [B_1 e^{-iK_1 h} + C_1 e^{iK_1 h}] e^{i(K_2 h)} \quad (5.49)$$

### Remarques :

L'énergie cinétique volumique ( $E_{cv1}$ ) et l'énergie potentielle volumique ( $E_{pv1}$ ) de la couche supérieure s'écrivent :

$$E_{cv1} = \frac{1}{2} \rho u_{z1,t}^2 \quad (5.50)$$

$$E_{pv1} = \frac{1}{2} E u_{z1,z}^2 \quad (5.51)$$

## 5.3 Modèle discret/continu 1D

### 5.3.1 Position du problème

De même que dans le cas continu/continu, on va considérer un bicouche 1D. Ici cependant, le bicouche sera mixte discret/continu. Il est constitué par une couche verticale discrète de  $n + 2$  grains reliés entre eux par une interaction linéaire (des ressorts de raideur  $k$ ) de hauteur  $h$ , le tout reposant sur une couche semi-infinie linéaire élastique homogène isotrope (fig.5.2). Une sollicitation  $F(t)$  s'exerce verticalement sur la surface.

Les grains sont des masses ponctuelles. Ils sont distants entre eux d'une distance  $d$  au repos. Cette distance  $d$  représente le diamètre moyen d'un grain de ballast.

Pour établir les équations de la couche discrète, on utilise une approche par l'énergie (méthode de Lagrange). Le déplacement  $u^m(t)$  représente le déplacement relatif du grain "m" par rapport à sa position d'équilibre. Pour les équations de la couche inférieure continue, on réutilisera directement les résultats obtenus dans la section précédente.

Les lois de comportement sont exclusivement linéaires.

Les conditions aux limites restent, comme dans le cas continu/continu :

- à la surface, on a transmission intégrale de la force de sollicitation.
- A l'interface, on a aussi continuité des déplacements et des forces.
- A l'infini, la condition de radiation est assurée.

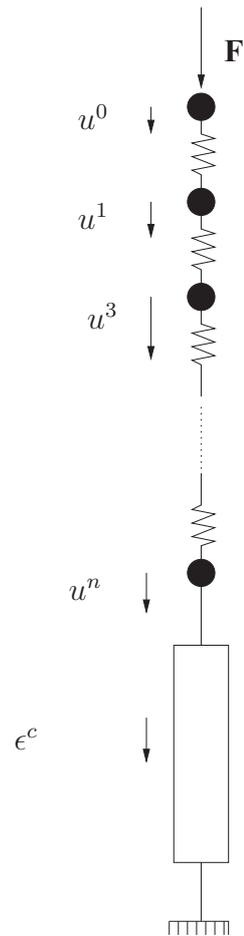


FIG. 5.2 – Matériau mixte discret continu sous l'action d'une charge variable

### 5.3.2 Etude de la couche supérieure discrète

L'énergie d'interaction entre deux grains  $m$  et  $m + 1$  s'écrit :

$$E_{m-m+1} = \frac{1}{2}k(u^m - u^{m+1})^2 \quad (5.52)$$

Dans l'étude de cette couche supérieure discrète, on va d'abord considérer les grains qui ne sont pas sur les bords (surface et interface) puis les grains aux limites. Cette distinction, d'ailleurs pas nécessaire, a pour but d'améliorer la compréhension de la méthode. Soit  $n + 2$  le nombre total de grains dans la couche supérieure. L'énergie potentielle d'interaction entre les grains s'écrit :

$$E_p = \sum_{m=0}^n E_{m-m+1} \quad (5.53)$$

Si on applique les relations de Lagrange à cette énergie potentielle pour les coordonnées généralisées  $(u^m)_{m \in ]0, n+1[}$ , on obtient les relations suivantes (grains au centre) :

$$\forall m \in \{1, \dots, n\}, M \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = -k(2u^m - u^{m+1} - u^{m-1}) \quad (5.54)$$

où  $M$  est la masse d'un grain.

Sur le grain en surface (grain "0"), on a d'une part une action du grain "1", et d'autre part une action de la force extérieure ( $\underline{F}(t)$ ). Par analogie avec les grains "au centre", il vient pour  $m = 0$  :

$$M \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} = -k(u^0 - u^1) + F \quad (5.55)$$

De même pour le grain à l'interface (grain "n+1"), on a d'une part une action du grain  $n$ , et d'autre part une action de la couche inférieure (résultante des forces issues du milieu continu sur le milieu discret  $f_{c \rightarrow d}$ ). Par analogie avec les grains "au centre", il vient pour  $m = n + 1$  :

$$M \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} = -k(u^{n+1} - u^n) + f_{c \rightarrow d} \quad (5.56)$$

En plus, à l'interface, on a continuité du déplacement entre la couche supérieure ( $u^{n+1}(t)$ ) et de la couche inférieure ( $u_{z2}(z, t)$ ) :

$$u^{n+1}(t) = u_{z2}(h, t) \quad (5.57)$$

### 5.3.3 Etude de la couche inférieure continue

On rappelle les résultats obtenus dans la section précédente :

– L'équation de comportement est :

$$E_2 u_{z2,zz} = \rho_2 u_{z2,tt} \quad (5.58)$$

– De même, la condition de radiation (déplacement nul à l'infini) se traduit par l'absence d'onde de retour dans la couche inférieure.

– A l'interface, il nous faut calculer la formule de la contrainte afin d'en déduire la force qu'exerce le milieu continu sur le milieu discret :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = f_{c \rightarrow d} e_z \quad (5.59)$$

$$\implies -\sigma_{zz} \alpha^2 = f_{c \rightarrow d} \quad (5.60)$$

### 5.3.4 Identification des paramètres discrets $k$ et $M$

On peut montrer (une autre justification sera présente dans le cas 3D) que les paramètres discrets  $k$  et  $M$  introduits par la modélisation discrète peuvent être reliés asymptotiquement aux paramètres continus par les relations suivantes :

$$k = Ed \quad (5.61)$$

$$M = \rho d^3 \quad (5.62)$$

avec :  $M$  est la masse ponctuelle d'un grain discret,  $\rho$  la masse volumique dans le cas continu,  $k$  la rigidité discrète, et  $d$  le paramètre de maille discret (diamètre moyen du grain de ballast).

**Justifications :** On va établir par exemple la relation (5.61) et le fait que les paramètres discrets  $k$  et  $d$  introduits dans l'approche granulaire peuvent être reliés aux paramètres continus dès que la distance entre les grains devient très faible (devant les autres longueurs comme la hauteur de la couche supérieure) et tend vers zéro. En effet, on comprend bien que si la distance entre les grains tend vers zéro, les masses ponctuelles que sont les grains vont finir par être infiniment près les uns des autres, jusqu'à former un continuum granulaire.

Pour comparer des quantités comparables, on va utiliser une comparaison sur les énergies : la densité d'énergie volumique du modèle discret ( $E_v^d$ ) sur une longueur de maille  $d$  devra être asymptotiquement équivalente à la densité d'énergie volumique du milieu continu ( $E_v$ ) de longueur  $d$  et de section  $\alpha^2$ . Il vient donc :

$$E_v^d \sim_{(\alpha,d) \rightarrow (0,0)} E_v \quad (5.63)$$

Si on considère uniquement l'énergie potentielle, cela revient à écrire que l'énergie  $E^d$  du milieu discret devient asymptotiquement équivalente à l'énergie continue  $E_{pc}$  d'un volume  $V$  de longueur  $d$  et de section horizontale  $\alpha^2$ . Pour cette étude, on a besoin de disposer dans la couche discrète d'un champ des déplacements continu (et même deux fois dérivables), alors que par définition, ce champ est discret. Pour résoudre cette difficulté, on fait l'hypothèse suivante : le champ des déplacements discrets  $(u^m(t))_{m \in \{0, \dots, n+1\}}$  est construit comme étant la trace d'un champ de déplacements généralisé  $U(z, t)$  deux fois dérivable. Le champ  $U(z, t)$  coïncide avec  $(u^m(t))_{m \in \{0, \dots, n+1\}}$  sur chacun des grains :

$$\forall t, \forall m \in \{0, \dots, n+1\}, U(md, t) = u^m(t) \quad (5.64)$$

#### Remarque :

Le champ des déplacements rendu deux fois dérivable existe : il suffit de prendre une fonction d'interpolation polynomiale de degré  $n+1$ . Ce choix n'est pas unique. Mais seule l'existence nous importe.

La fonction  $U(z, t)$  vérifie également les relations discrètes :

$$E_{m-m+1} = \frac{1}{2}k(u^m - u^{m+1})^2 \quad (5.65)$$

$$= \frac{1}{2}k[U(md, t) - U((m+1)d, t)]^2 \quad (5.66)$$

De plus, comme  $d \rightarrow 0$ , on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 pour le champ des déplacements généralisé :

$$U((m+1)d, t) = U(md) + dU_{,z}(md) + o(d) \quad (5.67)$$

avec :  $o(d)$  indiquant que ce terme est négligeable devant  $d$  (notation de Landau).

En remplaçant dans l'expression précédente de l'énergie, il vient :

$$E_{m-m+1} = \frac{1}{2}k[U(md, t) - U((m+1)d, t)]^2 \quad (5.68)$$

$$= \frac{1}{2}kd^2U_{,z}^2(md, t) + o(d^2) \quad (5.69)$$

D'après la section précédente, l'énergie volumique d'un milieu continu s'écrit :

$$E_v = \frac{1}{2}Eu_{z,z}^2 \quad (5.70)$$

où on rappelle que :  $u_{z,z}$  est la déformation selon l'axe condiréré ( $z$ ) pour le milieu continu,  $E$  son module d'Young.

Avec  $V = \alpha^2 d$  tendant vers zéro, l'énergie potentielle continue associée au volume  $V$  est :

$$E_{pc} \approx V \frac{1}{2}Eu_{z,z}^2 \quad (5.71)$$

En comparant les deux expressions de l'énergie, il vient :

$$E_v^d \underset{(\alpha,d) \rightarrow (0,0)}{\sim} E_v \quad (5.72)$$

$$\iff \frac{1}{2}kd^2U_{,z}^2(md, t) \underset{(\alpha,d) \rightarrow (0,0)}{\sim} V \frac{1}{2}Eu_{z,z}^2(md, t) \quad (5.73)$$

$$\iff kd \underset{(\alpha,d) \rightarrow (0,0)}{\sim} E\alpha^2 \quad (5.74)$$

Soit :  $\phi(d, \alpha) = E\alpha^2 - kd$ .

Cette fonction de deux variables est continue (somme de deux polynômes), donc (mais on le savait déjà) :

$$\phi(0, 0) = 0 \quad (5.75)$$

Pour atteindre cette valeur, on peut prendre n'importe quel chemin (grâce à la continuité de  $\phi$ ), et en particulier  $\alpha = d$ , lorsque  $d \rightarrow 0$ . Ainsi, asymptotiquement, on a :

$$k \underset{d \rightarrow 0}{\sim} Ed \quad (5.76)$$

En utilisant l'énergie cinétique, on peut démontrer de même que :

$$M = \rho d^3 \quad (5.77)$$

avec :  $M$  est la masse ponctuelle d'un grain discret, et  $\rho$  la masse volumique dans le cas continu.

### 5.3.5 Etude des équations de dispersion

Pour le cas continu, on rappelle l'équation du mouvement au centre :

$$\rho \frac{\partial^2 u_z(z, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u_z(z, t)}{\partial z^2} \quad (5.78)$$

En utilisant une solution sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique (ou bien en utilisant la transformée de Fourier)  $u_z(z, t) = Ae^{i(\omega t - Kz)}$ , on obtient l'équation de dispersion dans le milieu continu :

$$K^2 = \frac{\rho\omega^2}{E} \quad (5.79)$$

De même, pour le milieu discret, on rappelle l'équation du mouvement au centre :

$$\forall m \in \{1, \dots, n\}, M \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = -k(2u^m - u^{m+1} - u^{m-1}) \quad (5.80)$$

Pour trouver l'équation de dispersion, on postule la solution de l'équation sous la forme d'une onde plane progressive, monochromatique discrète :  $u^m(t) = Ae^{i(\omega t - Kmd)}$ . En remplaçant cette expression dans l'équation du mouvement, il vient :

$$\forall m \in \{1, \dots, n\}, -M\omega^2 Ae^{i(\omega t - Kmd)} = -kAe^{i(\omega t - Kmd)} [2 - 2\cos(Kd)] \quad (5.81)$$

$$= -2kAe^{i(\omega t - Kmd)} \left[ \sin^2\left(\frac{Kd}{2}\right) \right] \quad (5.82)$$

$$\iff -M\omega^2 = -4k \sin^2\left(\frac{Kd}{2}\right) \quad (5.83)$$

attention :  $K$  est la pulsation spatiale, alors que  $k$  est la rigidité entre deux grains consécutifs. En utilisant la section précédente qui donne des relations asymptotiques entre les approches discrète et continue, on a :

$$\omega_d^2 = \frac{4E}{\rho d^2} \sin^2\left(\frac{Kd}{2}\right) \quad (5.84)$$

$$\omega^2 = \frac{EK^2}{\rho} \quad (5.85)$$

où :  $\omega_d^2$  est la pulsation propre du milieu discret (nouvelle notation),  $\omega^2$  celle du milieu continu.

### Remarques :

En comparant les équations de dispersion dans les cas discret et continu, on observe :

- Si  $d \rightarrow 0$ , il est facile de montrer que l'équation discrète tend vers l'équation continue.
- Contrairement au cas continu, dans le cas discret,  $\omega_d$  est périodique (et symétrique). Il suffit donc de faire une étude de  $\omega_d(K)$  sur la première demi-période :  $K \in [0, \frac{\pi}{d}]$ . La première période s'appelle la première zone de Brillouin.
- On remarque que la valeur des pulsations est bornée uniquement dans le cas discret. Cette borne ( $\omega_d^b$ ) vaut en valeur absolue :  $\omega_d^b = \frac{4E}{\rho d^2}$ . Ainsi, dans le cas discret uniquement, les hautes fréquences sont coupées à partir de  $\omega_d^b$ . Cette valeur de  $\omega_d^b$  est d'autant plus grande que le grain est petit : cela signifie que si le grain devient infiniment petit, il n'y a plus de fréquence coupée. Inversement, plus le grain devient gros, plus le caractère discret se manifeste tôt (en fréquence). De même, la coupure se produira d'autant plus vite que la rigidité (module d'Young) devient faible ou que la masse volumique devient importante.

### 5.3.6 Recherche et comparaison des fréquences propres entre les approches discrète et continue

L'objet de cette étude est de comparer les modes propres entre une structure granulaire et une structure continue 1D. Il faudra déterminer entre autres l'influence du diamètre des grains.

Une fréquence propre est une fréquence qui ne dépend que des caractéristiques intrinsèques d'un matériau. L'ensemble des fréquences propres associés aux modes propres permet de caractériser la nature d'un matériau.

Pour comparer les milieux discret et continu dans le cas 1D, on va se limiter à la fréquence propre fondamentale (fréquence propre la plus basse).

### 5.3.6.1 Milieu continu

Dans le cas continu, on part de l'équation de dispersion :

$$\omega = k_z \sqrt{\left(\frac{E_b}{\rho}\right)} \quad (5.86)$$

où  $\omega$  est la pulsation continue,  $k_z$  la pulsation spatiale,  $E_b$  le module d'Young, et  $\rho$  la masse volumique.

Or, la relation entre la pulsation spatiale et la longueur d'onde  $\lambda$  est la suivante :

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.87)$$

D'où :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{E_b}{\rho}} \quad (5.88)$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (5.89)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E_b}{\rho}} \quad (5.90)$$

avec :  $\omega_0$  est la pulsation caractéristique,  $f_0$  la fréquence caractéristique.

On effectue des applications numériques pour des modules de rigidité valant de 200MPa à 100MPa. La masse volumique utilisée est celle constatée sur les voies ferrées pour le ballast ( $1700kg.m^{-3}$ ), la taille caractéristique du grain est de 4cm. Cette taille caractéristique sera prise comme longueur d'onde  $\lambda$ .

$$f_0^{200MPa} = 428.7465Hz \quad (5.91)$$

$$f_0^{150MPa} = 371.3053Hz \quad (5.92)$$

$$f_0^{100MPa} = 303.1695Hz \quad (5.93)$$

La fréquence fondamentale est un bon indicateur de la rigidité d'un matériau. Elle augmente, les autres paramètres étant fixés, lorsque la rigidité du matériau augmente. C'est ce que l'on peut observer sur le calcul des fréquences fondamentales.

### 5.3.6.2 Milieu discret

La méthode générale est la suivante :

- On définit le système d'équations régissant le comportement des  $n + 1$  équations sans les interactions avec les milieux extérieurs.
- On met ce système sous forme matricielle.
- On cherche une solution pour le déplacement  $u^n(t)$  de la forme :  $u^n(t) = e^{i\omega t} \tilde{u}^n$ . On obtient une équation de la forme :

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\tilde{U}} = \underline{0} \quad (5.94)$$

- Dès lors, si on veut une solution non nulle, le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  doit être nul.
- Les pulsations propres seront les valeurs particulières de  $\omega$  qui permettront d'annuler le déterminant de la matrice  $\underline{\underline{A}}$ .

On applique cette méthode à notre cas. Les équations sans les interactions avec l'extérieur s'écrivent :

$$\forall m \in ]0, n[, \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = -\frac{v_d^2}{d^2} (2u^m - u^{m+1} - u^{m-1}) \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} = -\frac{v_d^2}{d^2} (u^0 - u^1) \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} = -\frac{v_d^2}{d^2} (u^n - u^{n-1}) \quad (5.97)$$

avec :  $v_d = d\sqrt{\frac{k}{M}}$ .

On met ces équations sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}(t)}{\partial t^2} = \frac{v_d^2}{d^2} \underline{\underline{G}} \cdot \underline{u}(t) \quad (5.98)$$

avec :

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et :

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^n \end{bmatrix}$$

On cherche une solution de la forme suivante :

$$\underline{u}(t) = e^{i\omega t} \underline{\tilde{U}} \quad (5.99)$$

On obtient bien une équation du même type que l'équation 5.94, avec  $\underline{\underline{A}}$  qui a pour expression :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \omega^2 - \frac{v_d^2}{d^2} & \frac{v_d^2}{d^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{v_d^2}{d^2} & \omega^2 - 2\frac{v_d^2}{d^2} & \frac{v_d^2}{d^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{v_d^2}{d^2} & \omega^2 - 2\frac{v_d^2}{d^2} & \frac{v_d^2}{d^2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{v_d^2}{d^2} & \omega^2 - 2\frac{v_d^2}{d^2} & \frac{v_d^2}{d^2} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_d^2}{d^2} & \omega^2 - 2\frac{v_d^2}{d^2} & \frac{v_d^2}{d^2} \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_d^2}{d^2} & \omega^2 - \frac{v_d^2}{d^2} \end{bmatrix}$$

La recherche des valeurs de  $\omega$  qui annulent le déterminant de  $\underline{\underline{A}}$  s'effectue ensuite de façon numérique (Matlab). Les résultats sont présentés dans le tableau 5.3.6.2.  $N$  désigne le nombre total de grains de diamètre  $d$  de la couche de hauteur fixée  $h = 0.4m$ . Ces trois grandeurs sont liées par la relation suivante :

$$N = \frac{h}{d} \quad (5.100)$$

TAB. 5.1 – Etude paramétrique de la fréquence propre fondamentale discrète

$E_b$ (MPa)	$N$							
	2	4	8	10	40	400	1000	2000
200	386.01	417.81	426.00	426.99	428.64	428.75	428.75	428.75
150	334.29	361.84	368.92	369.78	371.21	371.30	371.31	371.31
100	272.95	295.44	301.23	301.92	303.09	303.17	303.17	303.17

Considérons le tableau (5.1). La fréquence fondamentale propre discrète augmente (jusqu'à la limite continue) lorsque le diamètre des grains diminue, c'est à dire, lorsque la densité en grains dans la couche d'épaisseur " $h$ " augmente. A densité de grains fixée, on retrouve comme dans le cas continu que la fréquence fondamentale s'accroît avec la rigidité du matériau discret. On remarque également que la fréquence fondamentale décroît avec la baisse de la densité en grains.

Soit  $e$  l'écart relatif entre les fréquences fondamentales discrète ( $f_d$ ) et continue ( $f_c$ ) pour des modules d'Young déterminés. Cet écart relatif  $e$  par rapport au milieu continu s'exprime de la manière suivante :

$$e = \frac{f_d - f_c}{f_c} \quad (5.101)$$

La figure (5.3) montre que l'écart des modes fondamentaux entre les milieux discret et continu diminue lorsque la densité de grains augmente. Cela revient à dire que l'écart diminue lorsque le rapport  $\frac{d}{h}$  tend vers zéro. On vérifie également l'absence de différence entre les trois courbes d'écart. Cela montre que la fréquence fondamentale propre du milieu discret est proportionnelle à la fréquence fondamentale propre continue.

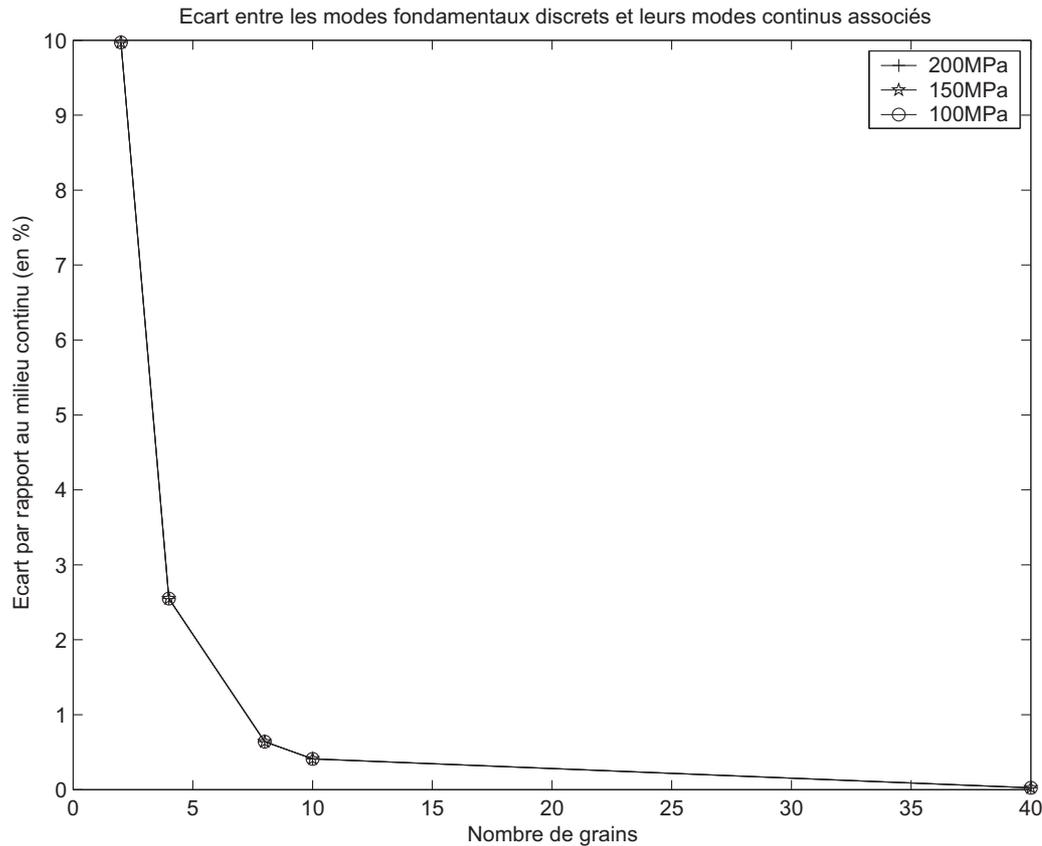


FIG. 5.3 – Convergence des modes fondamentaux discrets vers les modes fondamentaux continus

### 5.3.7 Résolution dans le cas d'une sollicitation sinusoïdale pour le bi-couche discret/continu

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer la réponse d'un système mixte discret/continu à une sollicitation sinusoïdale. Soit :  $F(t) = a \sin(\Omega t)^2$  la sollicitation sinusoïdale s'appliquant sur la surface de la couche supérieure de ballast. On s'intéresse à l'accélération dans la couche supérieure (de ballast), et pas à celle dans la sous-couche continue. Par conséquent, l'enjeu de la résolution dans le milieu continu va être de déterminer la force qu'exerce le milieu continu sur le milieu discret. Ensuite, compte tenu des autres conditions aux limites, on remplacera ces expressions dans les équations discrètes.

### 5.3.8 Couche continue

L'ensemble des solutions de l'équation de D'Alembert suivante :

$$\frac{\partial^2 u_z(z, t)}{\partial t^2} = v_c^2 \frac{\partial^2 u_z(z, t)}{\partial z^2} \quad (5.102)$$

<sup>2</sup>Pour la suite du chapitre, ce facteur "a" vaudra 1.

où :

$$v_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.103)$$

s'écrit sous la forme de la somme de deux fonctions dépendant d'un seul paramètre :

$$u_z(t, z) = g\left(t + \frac{(z - h)}{v_c}\right) + h\left(t - \frac{(z - h)}{v_c}\right) \quad (5.104)$$

Il s'agit de deux fonctions d'onde se propageant respectivement vers les  $z$  croissants et décroissants. Considérant la condition à la limite pour le déplacement (déplacement nul à l'infini), l'expression de  $u_z$  se réduit à :

$$u_z(t, z) = g\left(t + \frac{(z - h)}{v_c}\right) \quad (5.105)$$

En somme, seules les ondes s'éloignant de l'interface seront considérées. Il n'y a pas d'onde réfléchie. On pose :

$$\theta = t + \frac{(z - h)}{v_c} \quad (5.106)$$

En différenciant, cela donne :

$$d\theta = dt + \frac{dz}{v_c} \quad (5.107)$$

Par conséquent, avec (5.105) et (5.107), il vient :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (5.108)$$

$$= \frac{1}{v_c} \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (5.109)$$

La décomposition de Fourier de  $u_z$  par rapport au temps s'écrit :

$$\underline{u}^c = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_z(z, \omega) e^{j(\omega t)} d\omega \quad (5.110)$$

Ainsi, à partir de :

$$\epsilon = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.111)$$

En utilisant la transformation de Fourier précédente ainsi que la relation 5.109, on a :

$$\hat{\epsilon}(z, \omega) = j \frac{\omega}{v_c} \hat{u}_z \quad (5.112)$$

$$\hat{\sigma}(z, \omega) = j E \frac{\omega}{v_c} \hat{u}_z \quad (5.113)$$

$$\hat{f}_{c \rightarrow d} = -j S E \frac{\omega}{v_c} \hat{u}_z \quad (5.114)$$

Or, lorsque  $z = h$ , on a :  $u_z(t, h) = u^n(t)$  (hypothèse d'encastrement sans glissement). La force d'interaction s'exprime donc de la manière suivante :

$$\hat{f}_{c \rightarrow d} = -j S E \frac{\omega}{v_c} \hat{u}^n(\omega) \quad (5.115)$$

### 5.3.9 Couche discrète

Pour la couche discrète, on obtient un système différentiel affine du deuxième ordre :

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u^0 \\ \dots \\ u^n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 + \frac{f_{c \rightarrow d}}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ \dots \\ u^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cela peut s'écrire sous forme symbolique :

$$M \frac{\partial^2 \underline{u}(t)}{\partial t^2} = k \underline{\underline{B}} \underline{u}(t) + \underline{f}(t) \quad (5.116)$$

Deux démarches sont alors possible :

- soit une démarche purement analytique en utilisant des exponentielles de matrices (on profite du fait que la matrice  $\underline{\underline{B}}$  est réelle et symétrique)
- soit une démarche semi-analytique en utilisant la transformation de Fourier

La méthode analytique permet d'avoir des expressions exactes facilement utilisables une fois les valeurs propres et vecteurs propres connus.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a, compte-tenu des conditions initiales existence et unicité des solutions qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{u}(t) = \underline{\underline{exp}}(-\sqrt{\frac{k}{M} \underline{\underline{B}} t}) \underline{\alpha} + \underline{\underline{exp}}(\sqrt{\frac{k}{M} \underline{\underline{B}} t}) \underline{\beta} + SP \quad (5.117)$$

où SP est une solution particulière,  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  sont des constantes d'intégration déterminées entièrement par les conditions initiales.

L'essentiel de la difficulté de cette méthode réside dans le calcul numérique des valeurs et vecteurs propres.

On va privilégier la seconde méthode qui s'adapte beaucoup mieux à une généralisation à n grains dans la couche discrète. On utilise une transformation de Fourier par rapport au couple temps-pulsation. L'équation 5.116 devient (avec cette transformation de Fourier) :

$$-\omega^2 M \underline{\hat{u}}(\omega) = k \underline{\underline{B}} \underline{\hat{u}}(\omega) + \underline{\hat{f}}(\omega) \quad (5.118)$$

Puisque  $\hat{f}_{c \rightarrow d}$  s'exprime en fonction de  $\hat{u}$ , on peut écrire le système précédent sous la forme suivante :

$$\underline{\hat{C}}(\omega) \underline{\hat{u}}(\omega) = \underline{\hat{f}}(\omega) \quad (5.119)$$

Avec :

$$\underline{\hat{C}}(\omega) = -k \underline{\underline{B}} - M \omega^2 \underline{\underline{1}} \quad (5.120)$$

$$\underline{\hat{f}}(\omega) = \hat{F} \underline{e}_0 \quad (5.121)$$

L'opération  $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$  désigne le produit tensoriel des vecteurs  $\underline{e}_i$  et  $\underline{e}_j$ .

Pour avoir la solution réelle, il suffira d'intégrer l'expression de  $\hat{u}$  par rapport à l'espace des pulsations. Ainsi, la résolution du problème initial consiste en une inversion matricielle ainsi que dans une intégration numériques (la FFT sera utilisée).

En fait, on ne pourra inverser la matrice  $\hat{C}(\omega)$  que si cette dernière est inversible. Deux cas peuvent se présenter :

- soit  $rg(\hat{C}(\omega)) < dim(\hat{C}(\omega))^3$ , auquel cas il existe une infinité de solutions de dimension au plus égale à  $dim(A) - rg(A)$ . Cette hypothèse se produit un nombre quantifié de fois pour une valeur de  $\omega$  donnée. La boucle de test est la suivante : dès que le déterminant de la matrice  $\hat{C}(\omega)$  est nul, on ajoute une petite valeur à  $\omega$  jusqu'à ce que la valeur du déterminant ne s'annule plus.
- soit  $rg(\hat{C}(\omega)) = dim(\hat{C}(\omega))$ , et dans ce cas, l'inversion a lieu sans difficulté.

## 5.4 Résultats : comparaison entre les bicouches mixte discret/continu et continu/continu

Le programme "1Dmixte" que j'ai rédigé en C++ permet d'effectuer cette résolution. Son utilisation demeure relativement simple :

- On écrit dans un fichier texte quelconque : les caractéristiques techniques des matériaux, le nombre de grains, les pulsations, les caractéristiques numériques de l'intégration, et le type de force  $\mathbf{F}$  d'excitation.
- On obtient en sortie : l'accélération et le déplacement spectraux (en fonction de la pulsation), ainsi que leurs valeurs réelles (en fonction du temps).

Ce programme procède de la manière suivante :

- pour chaque pulsation  $\omega$ , on construit la matrice  $\hat{C}(\omega)$  et  $\hat{\Delta}(\omega)$
- on inverse le système obtenu
- on intègre le déplacement spectral  $\hat{u}(\omega)$  et l'accélération spectrale associée  $\hat{a}(\omega)$

Avec :

$$\hat{a}(\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega) \quad (5.122)$$

### 5.4.1 Convergence de l'approche discret/continu vers l'approche continu/continu

On va vérifier, dans ce paragraphe, que les prévisions de l'accélération dans le cas discret/continu convergent vers celles de l'accélération dans le cas continu/continu lorsque le rapport  $\frac{d}{h}$  tend vers zéro. Le point d'observation est situé à la surface du bicouche. Sur les trois couples de rigidités testés (cf.figure (5.4) pour  $30Hz$ ), l'écart relatif diminue lorsque la densité des grains augmente. Cet écart relatif du milieu discret/continu par rapport au milieu continu/continu sur l'accélération se définit exactement de la même manière que l'écart relatif sur les fréquences :

$$ee = \frac{a_d - a_c}{a_c} \quad (5.123)$$

où :  $a_d$  représente l'accélération du milieu discret/continu, et  $a_c$  l'accélération du milieu continu/continu.

---

<sup>3</sup>On note "rg(A)" le rang de la matrice "A", et "dim(A)" la dimension de la matrice carrée "A". On rappelle que le rang correspond au nombre de vecteurs qui engendrent la matrice "A"

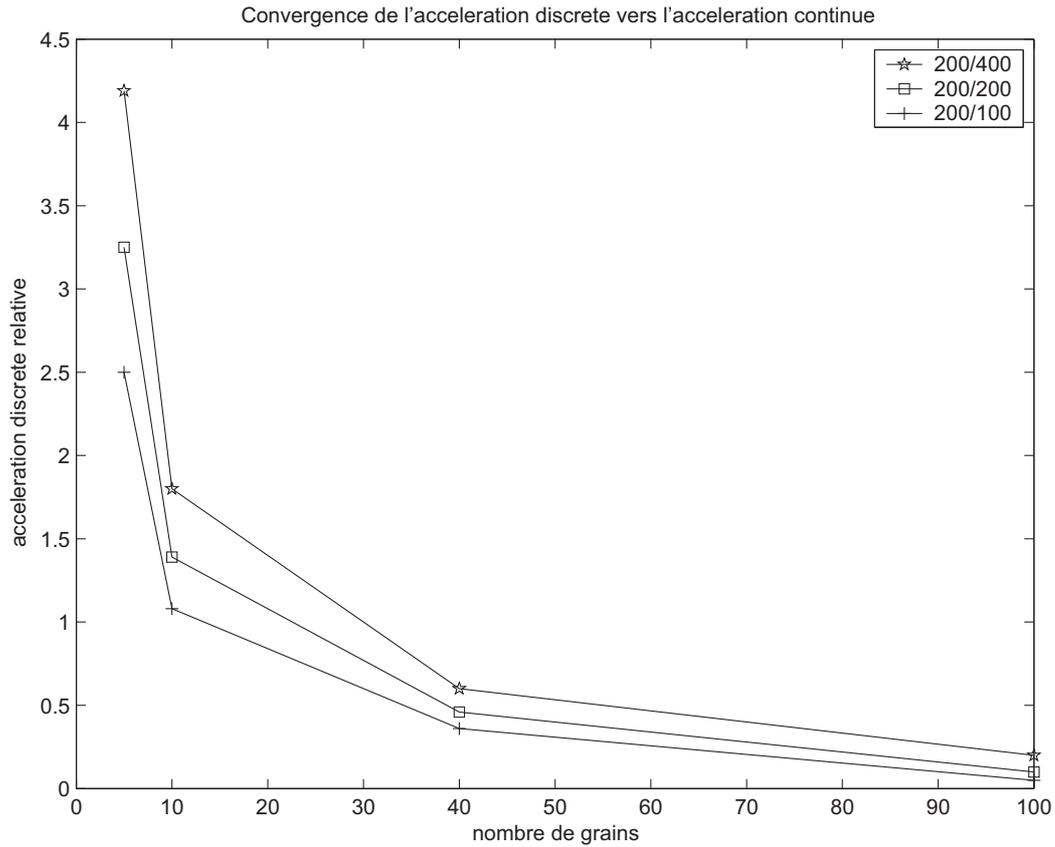


FIG. 5.4 – Convergence de l'accélération du milieu discret/continu vers l'accélération du milieu continu/continu pour une sollicitation de  $30Hz$  à la surface du bicouche

### 5.4.2 Influence de la différence des rigidités et de la fréquence de la sollicitation

On considère dans cette section le cas d'un bicouche dont  $h = 0.4m$ , et où, pour le cas discret/continu, il y ait dix grains. L'espace entre deux grains (modélisant le diamètre moyen du grain de ballast) est alors de  $4cm$ . Les différentes grandeurs sont observées pour la surface représentant la couche de ballast.

Dans les tableaux (5.2) et (5.3), on constate que l'accélération est d'autant plus importante que la fréquence de sollicitation, les rigidités des couches supérieure ou inférieure sont élevés.

Dans notre cas 1D, les écarts relatifs définis par la grandeur  $ee$  (5.123) entre les accélérations des modèles discret/continu et continu/continu (tableau (5.4)) sont moins importants que dans le cas 3D (pour les fréquences de sollicitation testées). Les plus faibles écarts se produisent la plupart du temps lorsque les rigidités des deux couches sont les mêmes. Les écarts demeurent plus élevés lorsque la fréquence de vibration augmente.

Enfin, le modèle continu/continu surestime toujours, dans notre étude paramétrique, le bicouche discret/continu.

#### Influence de la fréquence de sollicitation :

Si on fixe les rigidités des deux couches de ballast, et que l'on examine uniquement l'in-

TAB. 5.2 – Modèle discret/continu : valeurs de l'accélération (ramenées à l'accélération de la gravité)

	fréquence des oscillations = 5Hz			fréquence des oscillations = 30Hz		
$E_s$	$E_b(MPa)$			$E_b(MPa)$		
(MPa)	50	100	200	50	100	200
50	0.110	0.107	0.105	1.49	1.23	1.12
100	0.0779	0.0747	0.0731	0.943	0.755	0.667
200	0.0561	0.0530	0.0514	0.673	0.513	0.438
400	0.0411	0.0380	0.0364	0.519	0.374	0.306

TAB. 5.3 – Modèle continu/continu : valeurs de l'accélération (ramenées à l'accélération de la gravité)

	fréquence des oscillations = 5Hz			fréquence des oscillations = 30Hz		
$E_s$	$E_b(MPa)$			$E_b(MPa)$		
(MPa)	50	100	200	50	100	200
50	0.110	0.109	0.106	1.50	1.26	1.14
100	0.0785	0.0750	0.0747	0.976	0.765	0.674
200	0.0566	0.0532	0.0515	0.701	0.0526	0.444
400	0.0416	0.0382	0.0365	0.544	0.386	0.311

TAB. 5.4 – Ecart relatif de l'accélération (5.123) du modèle discret/continu par rapport au modèle continu/continu

	fréquence des oscillations = 5Hz			fréquence des oscillations = 30Hz		
$E_s$	$E_b(MPa)$			$E_b(MPa)$		
(MPa)	50	100	200	50	100	200
50	-0.494%	-1.98%	-1.35%	-0.926%	-2.50%	-2.13%
100	-0.679%	-0.355%	-2.11%	-3.40%	-1.32%	-1.08%
200	-0.925%	-0.491%	-0.253%	-3.93%	-2.43%	-1.39%
400	-1.24%	-0.677%	-0.354%	-4.54%	-2.99%	-1.80%

fluence de la fréquence de sollicitation, on constate qu'entre 5Hz et 30Hz, l'accélération est multipliée par un facteur 10. Ceci est vrai pour les deux modèles de bicouches.

Dans le cas d'un demi-espace infini avec une seule couche, la formule de l'accélération ( $A_z$ ) est la suivante :

$$A_z = c(E, \rho, b)\omega e^{i\omega t} \quad (5.124)$$

$$c(E, \rho, b) = \frac{ib}{\sqrt{E\rho}} \quad (5.125)$$

avec :  $A_z$  représente l'accélération verticale,  $c(E, \rho)$  un paramètre dépendant uniquement de caractéristiques du sol (module d'Young  $E$ , masse volumique  $\rho$ , et  $b$  l'intensité de la force surfacique appliquée), et  $\omega$  la pulsation de la sollicitation.

A l'aide de cette expression de l'accélération, on peut montrer aisément que le facteur multiplicatif sera de 6 dans le cas d'un monocouche pour passer de 5Hz à 30Hz.

Une des différences entre les approches bicouche et monocouche tient dans la réflexion des ondes sur la paroi séparant les deux couches. C'est sans doute suffisant pour expliquer le passage d'un facteur 6 à un facteur 10 suivant l'approche, lorsqu'on accroît la fréquence de sollicitation de  $5Hz$  à  $30Hz$ .

## 5.5 Conclusion du chapitre

Dans cette partie, on a construit un modèle 1D élastique linéaire sans amortisseur mixte discret-continu que l'on a comparé à un bicouche continu-continu. La méthodologie employée est la suivante : on construit les énergies potentielles totales des milieux discrets et continus, puis on utilise les équations de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement. L'hypothèse retenue à l'interface fut un comportement identique entre les milieux discret et continu. Les paramètres discrets ont été trouvés en identifiant les densités d'énergie discrètes et continues lorsque le paramètre de maille tendait vers zéro.

L'étude des équations de dispersion montre que le réseau granulaire se comporte comme un filtre passe-bas : les hautes fréquences sont coupées d'autant plus que la taille des grains augmente. On a vérifié que, pour différentes rigidités, la fréquence fondamentale du milieu discret tendait vers celle du milieu continu.

A l'aide de la transformée de Fourier, on résout les équations différentielles linéaires trouvées précédemment (approche spectrale). On aurait pu utiliser une résolution purement analytique, mais, elle aurait été beaucoup plus lourde et longue.

En outre, on a pu évaluer l'accélération en fonction de la force d'excitation (elle a été prise sinusoïdale). Elle s'accroît d'ailleurs lorsque la fréquence augmente.

Si l'on compare un bicouche mixte (discret/continu) avec un bicouche purement continu, les valeurs de l'accélération s'accroissent lorsque :

- la fréquence de vibration augmente
- la rigidité des couches diminue.

Par exemple, pour dix grains, lorsqu'on passe de  $5Hz$  à  $30Hz$ , l'accélération est multipliée par dix environ, tandis que l'écart entre les modèles double voire est multiplié par un coefficient supérieur à deux. Plus un sol est raide, plus l'accélération diminue.

En fait, le nombre de grains dans la hauteur de la couche supérieure représentant le ballast est le facteur déterminant pour qualifier le caractère discret de la couche de ballast. Ce nombre de grains est le rapport adimensionné entre la hauteur de la couche et la taille des grains.

Pour une dizaine de grains, les écarts entre les modèles bicouches 1D ne sont pas très significatifs. Par conséquent, dans le cadre 1D, il n'est pas nécessaire d'utiliser un modèle mixte discret/continu : un bicouche continu suffit. En somme pour le dimensionnement de la voie ferrée, si l'on en croit la modélisation 1D, les paramètres pertinents sont : la hauteur de la couche de ballast, les rigidités, la masse volumique des couches de sol et la fréquence de sollicitation.

# Chapitre 6

## Approche 3D d'un bicouche linéaire mixte discret/continu

### 6.1 Introduction

L'approche 1D a montré des effets discrets, notamment sur le filtrage des hautes fréquences. Le nombre de grains dans une épaisseur donnée, ie la densité de grains est un bon indicateur d'écart entre les approches mixte discret/continu et continu/continu. En outre, l'écart dépend fortement de la sollicitation (sa fréquence).

Toutefois, dans le cas 1D, les écarts ne semblent pas très probants. Est-ce que le fait de considérer des cas 3D va accroître les écarts ? Va-t-on vérifier les mêmes effets discrets que dans le cas 1D ?

Ce chapitre est largement inspiré de l'article que nous avons publié dans la revue "Computers and Structures"[66]. Le programme "mvload", écrit en C++, créé par V.H.Nguyen pour un multicouche continu, a été enrichi du cas discret multicouche.

Un des objectifs de cette partie est d'étendre le modèle de Suiker et al. à un bicouche mixte discret/continu 3D, puis de le comparer à un bicouche standard continu/continu 3D[10, 11, 29, 55]. On montrera entre autres que la pertinence de notre modèle dépend des différences de caractéristiques entre le ballast et le sol qui se trouve au-dessous, ainsi que de la vitesse de la charge mobile.

La modélisation introduite est décrite dans la section 2. La section 3 est dédiée à la méthode de résolution, alors que les résultats sont présentés dans la section 4.

### 6.2 Présentation du problème

#### 6.2.1 Description du modèle

On considère un bicouche infini 3D ( $\Omega$ ) comme on peut le voir sur la figure 6.1. La couche supérieure, le ballast ( $\Omega_d$ ), est considérée comme étant un milieu granulaire discret. Cette couche repose sur demi-espace élastique infini continu ( $\Omega_c$ ) telle que :  $\Omega = \Omega_d \cup \Omega_c = \{x, y, z \in \mathbf{R}; z \geq 0\}$ . La couche discrète, d'épaisseur  $h$ , est postulée comme étant un assemblage périodique de grains identiques. La sous-couche continue a un module d'Young  $E_s$  et un coefficient de Poisson de  $\nu_s$ . La charge mobile ( $f$ ) est appliquée sur la surface libre

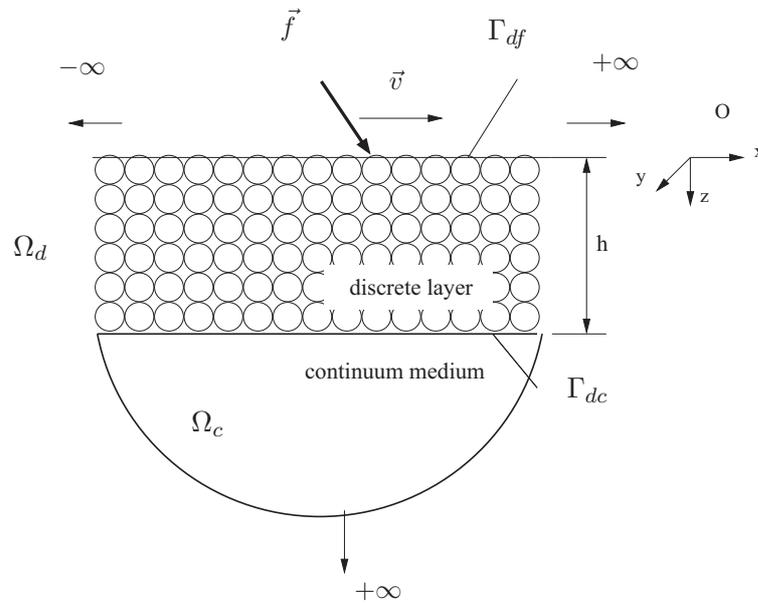


FIG. 6.1 – Bicouche mixte discret/continu sous l'action d'une charge mobile

( $z = 0$ ) avec une vitesse ( $v$ ) dans l'axe ( $Ox$ ).

On s'intéresse à la réponse dynamique en régime stationnaire : les observables seront le déplacement relatif et l'accélération à une profondeur donnée.

## 6.2.2 Modélisation du ballast

La couche de ballast est considérée comme un réseau cubique simple de masses ponctuelles ( $M$ ) interagissant entre elles. Le diamètre moyen du grain de ballast ( $d$ ) est la longueur caractéristique du réseau cubique. La position des grains dans le réseau cubique simple est repéré par  $(ld, md, nd)$  où  $(l, m, n)$  sont trois nombres entiers. La fig.(6.2) montre la maille conventionnelle de ce réseau cubique simple, ainsi que les interactions prises en compte dans le modèle. Deux raideurs de ressort sont introduites : une longitudinale, c'est-à-dire selon les arêtes ( $k$ ) et une diagonale sur les faces du cube ( $C$ ). Dans un souci de simplicité, toutes les interactions seront considérées comme linéaires.

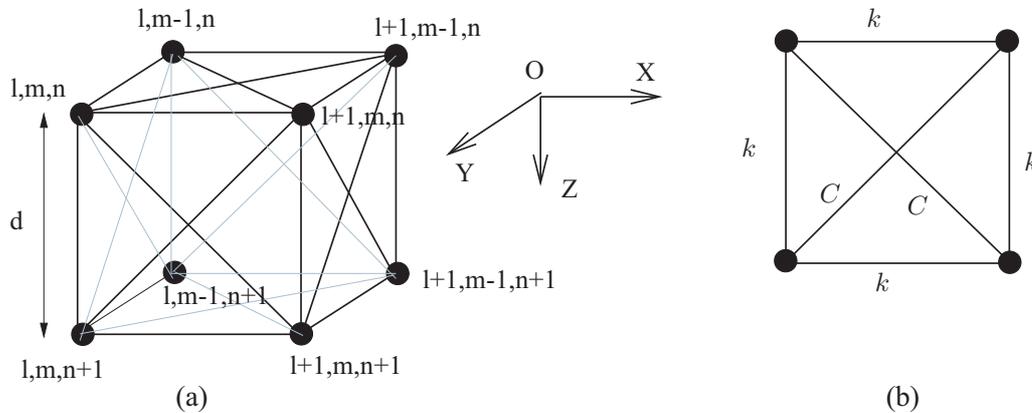


FIG. 6.2 – Maille conventionnelle et interactions entre les grains

On note  $\underline{u}^{l,m,n}$  le déplacement du grain  $(l, m, n)$ . L'énergie potentielle associée à ce grain s'exprime de la manière suivante :

$$E_p^{l,m,n} = \frac{1}{4} \left[ \sum_{\substack{p,q,r \in \{-1,0,1\} \\ |p|+|q|+|r|=1}} k(\underline{u}^{l,m,n} - \underline{u}^{l+p,m+q,n+r})^2 + \sum_{\substack{p,q,r \in \{-1,0,1\} \\ |p|+|q|+|r|=2}} C(\underline{u}^{l,m,n} - \underline{u}^{l+p,m+q,n+r})^2 \right], \quad (6.1)$$

En l'écrivant de manière explicite, on a :

$$\begin{aligned} E_p^{l,m,n} = & \frac{1}{2} \frac{k}{2} [(u_x^{l,m,n} - u_x^{l+1,m,n})^2 + (u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m,n})^2 \\ & (u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m+1,n})^2 + (u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m-1,n})^2 \\ & (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m,n+1})^2 + (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m,n-1})^2] \\ & + \frac{C}{8} [(u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m,n-1} + u_z^{l,m,n} - u_z^{l-1,m,n-1})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l+1,m,n+1} + u_z^{l,m,n} - u_z^{l+1,m,n+1})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l+1,m,n-1} - u_z^{l,m,n} + u_z^{l+1,m,n-1})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m,n+1} - u_z^{l,m,n} + u_z^{l-1,m,n+1})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m-1,n} + u_y^{l,m,n} - u_y^{l-1,m-1,n})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l+1,m+1,n} + u_y^{l,m,n} - u_y^{l+1,m+1,n})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m+1,n} - u_y^{l,m,n} + u_y^{l-1,m+1,n})^2 \\ & (u_x^{l,m,n} - u_x^{l+1,m-1,n} - u_y^{l,m,n} + u_y^{l+1,m-1,n})^2 \\ & (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m+1,n+1} + u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m+1,n+1})^2 \\ & (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m-1,n-1} + u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m-1,n-1})^2 \\ & (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m-1,n+1} - u_y^{l,m,n} + u_y^{l,m-1,n+1})^2 \\ & (u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m+1,n-1} - u_y^{l,m,n} + u_y^{l,m+1,n-1})^2] \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'énergie potentielle totale est :

$$E_p = \sum_{l,m,n} E_p^{l,m,n} \quad (6.3)$$

L'énergie cinétique du grain  $(l, m, n)$  s'écrit :

$$E_c^{l,m,n} = \frac{1}{2} M |\underline{\dot{u}}^{l,m,n}|^2 \quad (6.4)$$

où  $\underline{\dot{u}}^{l,m,n}$  désigne le vecteur vitesse du grain  $(l, m, n)$ .

L'énergie cinétique totale s'exprime :

$$E_c = \sum_{l,m,n} E_c^{l,m,n} \quad (6.5)$$

On a utilisé la géométrie cubique simple : il s'agissait d'un des modèles les plus simples qui tenaient compte des effets de Poisson.

### 6.2.3 Equations du mouvement

#### 6.2.3.1 La couche discrète

Les équations du mouvement sont extraites des équations de Lagrange[18] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_k^{l,m,n}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_k^{l,m,n}} + \frac{\partial E_p}{\partial u_k^{l,m,n}} = f_k^{l,m,n}, \quad k \in \{x, y, z\} \quad (6.6)$$

où  $f_k^{l,m,n}$  désigne la  $k^{ieme}$  composante de la résultante des forces extérieures appliquées au grain  $(l, m, n)$ .

En substituant les éqs.(6.3,6.5) dans l'équation 6.6 on obtient les équations du mouvement au centre (par opposition à une position aux limites) pour le grain  $(l, m, n)$  :

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_x^{l,m,n} + \frac{k}{2}(2u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m,n} - u_x^{l+1,m,n}) + \frac{C}{4}(8u_x^{l,m,n} - u_x^{l-1,m,n-1} \\ - u_x^{l+1,m,n-1} - u_x^{l-1,m,n+1} - u_x^{l+1,m,n+1} - u_x^{l-1,m-1,n} - u_x^{l+1,m-1,n} \\ - u_x^{l-1,m+1,n} - u_x^{l+1,m+1,n} - u_z^{l+1,m,n+1} + u_z^{l-1,m,n+1} - u_z^{l-1,m,n-1} \\ + u_z^{l+1,m,n-1} + u_y^{l-1,m+1,n} - u_y^{l-1,m-1,n} + u_y^{l+1,m-1,n} - u_y^{l+1,m+1,n}) = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_y^{l,m,n} + \frac{k}{2}(2u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m-1,n} - u_y^{l,m+1,n}) + \frac{C}{4}(8u_y^{l,m,n} - u_y^{l,m-1,n-1} \\ - u_y^{l,m+1,n-1} - u_y^{l,m-1,n+1} - u_y^{l,m+1,n+1} - u_y^{l-1,m-1,n} - u_y^{l+1,m-1,n} \\ - u_y^{l-1,m+1,n} - u_y^{l+1,m+1,n} - u_x^{l+1,m+1,n} + u_x^{l-1,m+1,n} - u_x^{l-1,m-1,n} \\ + u_x^{l+1,m-1,n} + u_z^{l,m-1,n+1} - u_z^{l,m-1,n-1} + u_z^{l,m+1,n-1} - u_z^{l,m+1,n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_z^{l,m,n} + \frac{k}{2}(2u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m,n-1} - u_z^{l,m,n+1}) + \frac{C}{4}(8u_z^{l,m,n} - u_z^{l,m-1,n-1} \\ - u_z^{l,m+1,n-1} - u_z^{l,m-1,n+1} - u_z^{l,m+1,n+1} - u_z^{l-1,m,n-1} - u_z^{l-1,m,n+1} \\ - u_z^{l+1,m,n-1} - u_z^{l+1,m,n+1} - u_x^{l-1,m,n-1} + u_x^{l+1,m,n-1} - u_x^{l+1,m,n+1} \\ + u_x^{l-1,m,n+1} + u_y^{l,m+1,n-1} - u_y^{l,m-1,n-1} + u_y^{l,m-1,n+1} - u_y^{l,m+1,n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

#### 6.2.3.2 Equations dans le milieu continu

Puisque nous considérons la sous-couche de la voie comme un milieu continu élastique linéaire isotrope, les équations élastodynamiques de Navier s'appliquent. Elles s'écrivent :

$$c_s^2 \nabla^2 \underline{u}(\underline{x}, t) + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \underline{u}(\underline{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t^2} \quad (6.10)$$

où  $c_p$  et  $c_s$  correspondent aux vitesses de propagation volumique et de cisaillement. Elles sont décrites par :

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6.11)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients de Lamé, et  $\rho$  la masse volumique de la sous-couche.

### 6.2.3.3 Les conditions aux limites

Trois types de conditions aux limites sont établies : (i) sur la surface libre, (ii) à l'interface, et (iii) à l'infini.

**Sur la surface libre,** un grain  $(l, m, 0)$  n'a pas d'interaction avec des grains au-dessus (puisque'il n'y en a pas !), mais avec la charge mobile ( $\underline{f}^{l,m,0}$ ). Les équations sur la surface libre sont donc :

$$\begin{aligned} & M\ddot{u}_x^{l,m,0} + \frac{k}{2}(2u_x^{l,m,0} - u_x^{l-1,m,0} - u_x^{l+1,m,0}) \\ & + \frac{C}{4}(6u_x^{l,m,0} - u_x^{l-1,m,1} - u_x^{l+1,m,1} - u_x^{l-1,m-1,0} - u_x^{l+1,m-1,0} \\ & \quad - u_x^{l-1,m+1,0} - u_x^{l+1,m+1,0} - u_z^{l+1,m,1} + u_z^{l-1,m,1} \\ & \quad + u_y^{l-1,m+1,0} - u_y^{l-1,m-1,0} + u_y^{l+1,m-1,0} - u_y^{l+1,m+1,0}) = f_x^{l,m,0} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} & M\ddot{u}_y^{l,m,0} + \frac{k}{2}(2u_y^{l,m,0} - u_y^{l,m-1,0} - u_y^{l,m+1,0}) \\ & + \frac{C}{4}(6u_y^{l,m,0} - u_y^{l,m-1,1} - u_y^{l,m+1,1} - u_y^{l-1,m-1,0} - u_y^{l+1,m-1,0} \\ & \quad - u_y^{l-1,m+1,0} - u_y^{l+1,m+1,0} - u_x^{l+1,m+1,0} + u_x^{l-1,m+1,0} \\ & \quad - u_x^{l-1,m-1,0} + u_x^{l+1,m-1,0} + u_z^{l,m-1,1} - u_z^{l,m+1,1}) = f_y^{l,m,0} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} & M\ddot{u}_z^{l,m,0} + \frac{k}{2}(u_z^{l,m,0} - u_z^{l,m,1}) \\ & + \frac{C}{4}(4u_z^{l,m,0} - u_z^{l,m-1,1} - u_z^{l,m+1,1} - u_z^{l-1,m,1} - u_z^{l+1,m,1} \\ & \quad - u_x^{l+1,m,1} + u_x^{l-1,m,1} + u_y^{l,m-1,1} - u_y^{l,m+1,1}) = f_z^{l,m,0} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Une charge ponctuelle d'amplitude  $\underline{f}_0$  peut par exemple être exprimée de la manière suivante :

$$\underline{f}^{l,m,0}(t) = \underline{f}_0 \delta(md) \delta(ld - vt) \quad (6.15)$$

où  $\delta$  désigne la distribution de Dirac.

**A l'interface** ( $\Gamma_{dc}$ ), on suppose que les grains de ballast sont encastrés dans le sol continu ( $\Omega_c$ ). Cela s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{u}_{continuum}(ld, md, h) = \underline{u}_{discrete}^{l,m,N}, \quad \text{with } Nd = h \quad (6.16)$$

De plus, les grains à l'interface n'ont pas d'interaction avec des grains en-dessous (il n'y en a pas !), mais avec la force résultante issue du sol :

$$\forall j \in (x, y, z), f_j^{l,m,N} = \sigma_{jz}(ld, md, h)d^2 \quad (6.17)$$

où  $\sigma_{ij}$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy dans  $\Omega_c$ . Par conséquent, les équations à l'interface ( $\Gamma_{dc}$ ) sont :

$$\begin{aligned} & M\ddot{u}_x^{l,m,N} + \frac{k}{2}(2u_x^{l,m,N} - u_x^{l-1,m,N} - u_x^{l+1,m,N}) \\ & + \frac{C}{4}(6u_x^{l,m,N} - u_x^{l-1,m,N-1} - u_x^{l+1,m,N-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -u_x^{l-1,m-1,N} - u_x^{l+1,m-1,N} - u_x^{l-1,m+1,N} \\
& -u_x^{l+1,m+1,N} + u_z^{l+1,m,N-1} - u_z^{l-1,m,N-1} \\
& + u_y^{l-1,m+1,N} - u_y^{l-1,m-1,N} + u_y^{l+1,m-1,N} - u_y^{l+1,m+1,N} = \sigma_{xz}(ld, md, h)d^2 \quad (6.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M\ddot{u}_y^{l,m,N} + \frac{k}{2}(2u_y^{l,m,N} - u_y^{l,m-1,N} - u_y^{l,m+1,N}) \\
& + \frac{C}{4}(6u_y^{l,m,N} - u_y^{l,m-1,N-1} - u_y^{l,m+1,N-1} \\
& - u_y^{l-1,m-1,N} - u_y^{l+1,m-1,N} - u_y^{l-1,m+1,N} \\
& - u_y^{l+1,m+1,N} - u_x^{l+1,m+1,N} + u_x^{l-1,m+1,N} \\
& - u_x^{l-1,m-1,N} + u_x^{l+1,m-1,N} - u_z^{l,m-1,N-1} + u_z^{l,m+1,N-1}) = \sigma_{yz}(ld, md, h)d^2 \quad (6.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M\ddot{u}_z^{l,m,N} + \frac{k}{2}(u_z^{l,m,N} - u_z^{l,m,N-1}) + \frac{C}{4}(4u_z^{l,m,N} \\
& - u_z^{l,m-1,N-1} - u_z^{l,m+1,N-1} - u_z^{l-1,m,N-1} - u_z^{l+1,m,N-1} \\
& + u_x^{l+1,m,N-1} - u_x^{l-1,m,N-1} - u_y^{l,m-1,N-1} + u_y^{l,m+1,N-1}) = \sigma_{zz}(ld, md, h)d^2 \quad (6.20)
\end{aligned}$$

**A l'infini**, les conditions aux limites suivantes sont fixées :

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow +\infty} \underline{u}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (6.21)$$

### 6.2.4 Identification des paramètres du modèle discret

Les paramètres  $k$  et  $C$  doivent être choisis de telle sorte que le milieu discret proposé converge vers un milieu élastique linéaire isotrope lorsque  $d$  tend vers zéro : la densité d'énergie du modèle discret ( $\frac{1}{d^3}E_p^{l,m,n}(d \rightarrow 0)$ ) doit converger vers celle du milieu continu ( $E_{pc}$ ). Cela s'écrit :

$$\frac{1}{d^3}E_p^{l,m,n}(d \rightarrow 0) \equiv E_{pc} \quad (6.22)$$

De surcroît, on suppose que  $\underline{u}^{l,m,n}$  est la trace d'un champ des déplacements deux fois dérivables,  $\underline{U}$  :

$$\underline{u}^{l,m,n} = \underline{U}(ld, md, nd) \quad (6.23)$$

En effectuant un développement de Taylor en  $d$  dans l'Eq.(6.23), on a :

$$u_k^{l\pm 1, m\pm 1, n\pm 1} = U_k + d(\pm U_{k,x} \pm U_{k,y}^{l,m,n} \pm U_{k,z}^{l,m,n}) + o(d), \quad k \in \{x, y, z\} \quad (6.24)$$

avec :

$$U_{k,i} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i}, \quad (i, k) \in \{x, y, z\} \quad (6.25)$$

La densité discrète d'énergie (Eqs.(6.1, 6.22)) peut être écrite :

$$\begin{aligned}
\frac{E_p^{l,m,n}}{d^3} &= \frac{k}{2d}[U_{x,x}^2 + U_{y,y}^2 + U_{z,z}^2] \\
&+ \frac{C}{2d}[(U_{x,y} + U_{y,x})^2 + (U_{x,z} + U_{z,x})^2 + (U_{y,z} + U_{z,y})^2 \\
&+ (U_{x,x} + U_{y,y})^2 + (U_{x,x} + U_{z,z})^2 + (U_{z,z} + U_{y,y})^2] \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Pour la couche de ballast, la densité d'énergie d'un milieu élastique linéaire isotrope est :

$$E_p = \frac{\lambda_b}{2}[U_{x,x} + U_{y,y} + U_{z,z}]^2 + \mu_b[U_{x,x}^2 + U_{y,y}^2 + U_{z,z}^2 + \frac{1}{2}((U_{x,y} + U_{y,x})^2 + (U_{x,z} + U_{z,x})^2 + (U_{y,z} + U_{z,y})^2)] \quad (6.27)$$

En se fondant sur les Eqs.(6.22, 6.26, 6.27),  $k$ ,  $C$ ,  $\mu_b$  et  $\lambda_b$  sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$C = k = \mu_b d = \lambda_b d \quad (6.28)$$

Cette relation (6.28) fixe le coefficient de Poisson du ballast :

$$\nu_b = 0.25 \quad (6.29)$$

Enfin, on a aussi l'identification suivante :

$$M = \rho d^3 \quad (6.30)$$

## 6.3 Résolution

Une méthode semi-analytique[55] est illustrée ci-après :

- Pour chaque couche, on utilise la transformation de Fourier dans les deux directions horizontales (par exemple). Les équations du mouvement permettent d'établir les équations liant les nombres d'onde.
- Ces équations sont résolues en utilisant les conditions aux limites.
- Enfin, la transformée de Fourier inverse est introduite.

### 6.3.1 La sous-couche continue

La transformée de Fourier de  $\underline{u}$  est définie par :

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{u}}(k_x, k_y, \omega, x, y, z, t) dk_x dk_y d\omega \quad (6.31)$$

où :

$$j^2 = -1 \quad (6.32)$$

$$\tilde{\underline{u}}(k_x, k_y, \omega, x, y, z, t) = \hat{\underline{u}}(k_x, k_y, \omega) e^{-j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (6.33)$$

$\tilde{\underline{u}}$  est appelée solution élémentaire de l'Eq.(6.10).

Ici,  $(k_x, k_y)$  sont les nombres d'onde dans les directions  $(x, y)$  et  $k_z$ , celui dans la direction  $z$ ,  $k_z$  étant une fonction des autres variables internes  $(k_x, k_y, \omega)$ .

A l'aide de la notation de solution élémentaire (Eq.(6.33)), l'Eq.(6.10) s'écrit :

$$\underline{\underline{\Delta}} \hat{\underline{u}}^*(k_x, k_y, \omega) = \underline{\underline{0}} \quad (6.34)$$

avec :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} c_p^2 k_x^2 + c_s^2 (k_y^2 + k_z^2) - \omega^2 & k_x k_y (c_p^2 - c_s^2) & k_x k_z (c_p^2 - c_s^2) \\ k_x k_y (c_p^2 - c_s^2) & c_p^2 k_y^2 + c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) - \omega^2 & k_y k_z (c_p^2 - c_s^2) \\ k_x k_z (c_p^2 - c_s^2) & k_y k_z (c_p^2 - c_s^2) & c_p^2 k_z^2 + c_s^2 (k_x^2 + k_y^2) - \omega^2 \end{bmatrix}$$

Des solutions non trivialement nulles de l'Eq.(6.34) existent lorsque  $\det(\underline{\underline{\Delta}}) = 0$ . Cela permet de donner les différentes expressions possibles en  $k_z$  :

$$k_{z1} = \pm j k_p = \pm j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c_p^2}} \quad (6.35)$$

$$k_{z2} = \pm j k_s = \pm j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}} \quad (6.36)$$

$\det(\underline{\underline{\Delta}}) = 0$  est une équation degré trois en  $k_z$ . On remarquera que  $k_{z1}$  est une racine simple et  $k_{z2}$  une racine double de cette équation de degré trois. Par la suite, la solution générale  $\hat{\underline{u}}$  aussi bien que la composante verticale de la contrainte ( $\hat{\underline{\sigma}}_z = (\hat{\sigma}_{jz}), j \in \{x, y, z\}$ ) sont des combinaisons linéaires des six inconnues  $\underline{A}_c^\pm = {}^t(A_{c,1}^\pm, A_{c,2}^\pm, A_{c,3}^\pm)$ . Ici, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\underline{\sigma}}_z \end{bmatrix}_c = \mathbf{C} \mathbf{e} \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c^- & 0 \\ 0 & e_c^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c^- \\ A_c^+ \end{bmatrix}$$

$$e_c^- = \begin{bmatrix} e^{-k_p z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-k_s z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-k_s z} \end{bmatrix}, e_c^+ = \begin{bmatrix} e^{k_p z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{k_s z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_s z} \end{bmatrix}$$

$$C_{11}^c = \begin{bmatrix} k_x & 0 & k_s \\ k_y & k_s & 0 \\ j k_p & j k_y & j k_x \end{bmatrix}, C_{12}^c = \begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_s \\ k_y & -k_s & 0 \\ j - k_p & j k_y & j k_x \end{bmatrix}$$

$$C_{21}^c = \mu d^2 \begin{bmatrix} -2k_x k_p & -k_x k_y & -(k_s^2 + k_x^2) \\ -2k_y k_p & -(k_y^2 + k_s^2) & -k_x k_y \\ -j(k_x^2 + k_y^2 + k_s^2) & -2j k_y k_s & -2j k_x k_s \end{bmatrix}$$

$$C_{22}^c = \mu d^2 \begin{bmatrix} 2k_x k_p & -k_y k_x & -(k_s^2 + k_x^2) \\ 2k_y k_p & -(k_y^2 + k_s^2) & -k_x k_y \\ -j(k_x^2 + k_y^2 + k_s^2) & 2j k_y k_s & 2j k_x k_s \end{bmatrix}$$

On remarquera que les composantes avec le signe  $-$  sont liées aux ondes descendantes, tandis que celles qui ont le signe  $+$  sont liées aux ondes qui vont vers le haut.

### 6.3.2 La couche discrète

En utilisant un mode opératoire analogue à celui du milieu continu, une solution générale est postulée :

$$\underline{u}(t)^{l,m,n} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{u}}(k_x, k_y, \omega, x, y, z, t) dk_x dk_y d\omega \quad (6.37)$$

$$\tilde{\underline{u}}^{l,m,n}(k_x, k_y, \omega, t) = \hat{\underline{u}}(k_x, k_y, \omega) e^{-j(\omega t - k_x l d - k_y m d - k_z n d)} \quad (6.38)$$



$$C_{21}^{1i} = \mu_b d [p_i^- (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 5 - c_x(2 + 2c_y + e^{-kz_i})) + q_i^- (2js_y s_x e^{-kz_i}) - r_i^- (js_x e^{-kz_i})] \quad (6.43)$$

$$C_{21}^{2i} = \mu_b d [q_i^- (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 5 - c_y(2 + 2c_x + e^{-kz_i})) + p_i^- (2js_y s_x e^{-kz_i}) - r_i^- (js_y e^{-kz_i})] \quad (6.44)$$

$$C_{21}^{3i} = \mu_b d [r_i^- (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 3 - e^{-kz_i}(1 + c_x + c_y)) - je^{-kz_i}(p_i^- s_x + q_i^- s_y)] \quad (6.45)$$

$$C_{22}^{1i} = \mu_b d [p_i^+ (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 5 - c_x(2 + 2c_y + e^{kz_i})) + q_i^+ (2js_y s_x e^{kz_i}) - r_i^+ (js_x e^{kz_i})] \quad (6.46)$$

$$C_{22}^{2i} = \mu_b d [q_i^+ (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 5 - c_y(2 + 2c_x + e^{kz_i})) + p_i^+ (2js_y s_x e^{kz_i}) - r_i^+ (js_y e^{kz_i})] \quad (6.47)$$

$$C_{22}^{3i} = \mu_b d [r_i^+ (-\frac{\omega^2 d^2 \rho}{\mu_b} + 3 - e^{kz_i}(1 + c_x + c_y)) - je^{kz_i}(p_i^+ s_x + q_i^+ s_y)] \quad (6.48)$$

### 6.3.3 Conditions aux limites

Six inconnues sont associées à chaque couche : trois qui sont associées aux ondes qui vont vers le haut ( $\underline{A}_c^+$ ) et trois associées aux ondes descendantes ( $\underline{A}_c^-$ ) pour le milieu continu ; de même, pour le milieu discret, on a trois ondes montantes ( $\underline{A}_d^+$ ) et descendantes ( $\underline{A}_d^-$ ). Pour chacune de ces douze inconnues, douze conditions aux limites sont utilisées.

– Sur la surface libre, les Eqs.(6.12, 6.13, 6.14) donnent :

$$[ C_{21}^d \quad C_{22}^d ]_{(z=0)} \begin{pmatrix} A_d^- \\ A_d^+ \end{pmatrix} = \hat{f}$$

où  $\hat{f}$  désigne le transformée de Fourier de  $f$ .

– A l'interface, les Eqs.(6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20) donnent :

$$\begin{bmatrix} C_{11}^d & C_{12}^d \\ C_{21}^d & C_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d^- & 0 \\ 0 & e_d^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_d^- \\ A_d^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{12}^c \\ C_{21}^c & C_{22}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c^- & 0 \\ 0 & e_c^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_c^- \\ A_c^+ \end{pmatrix}$$

– A l'infini,  $\hat{u} \rightarrow \underline{0}$  implique  $\underline{A}_c^+ = \underline{0}$

Ainsi, on a douze équations associées aux douze inconnues, ce qui permet de trouver  $\hat{u}$ .

En utilisant une méthode numérique pour trouver la transformée de Fourier inverse (par exemple la technique de la transformée de Fourier rapide), on trouve la solution en  $\underline{u}(x, y, z, t)$ . On remarquera que la zone d'intégration pour la couche discrète est la première zone de Brillouin[16] que l'on a décrit dans le paragraphe suivant :

$$(k_x, k_y) \in [-\frac{\pi}{d} : \frac{\pi}{d}]^2 \quad (6.49)$$

### 6.3.4 Illustration sur un cas simple 1D de la première zone de Brillouin

Dans notre résolution, on a utilisé une approche vibratoire : afin de mieux comprendre ces vibrations, on a utilisé des notions de cristallographie telles que la première zone de Brillouin par exemple.

On va préciser dans cette section le rôle physique de cette zone uniquement dans le cas monoatomique unidimensionnel. Mais évidemment, le rôle et la détermination de cette zone peuvent être généralisés au cas tridimensionnel tel qu'il est présent dans le modèle que nous avons construit dans la suite de ce rapport. On pourra pour cela se rapporter à la bibliographie([6]). Considérons le réseau unidimensionnel monoatomique suivant :

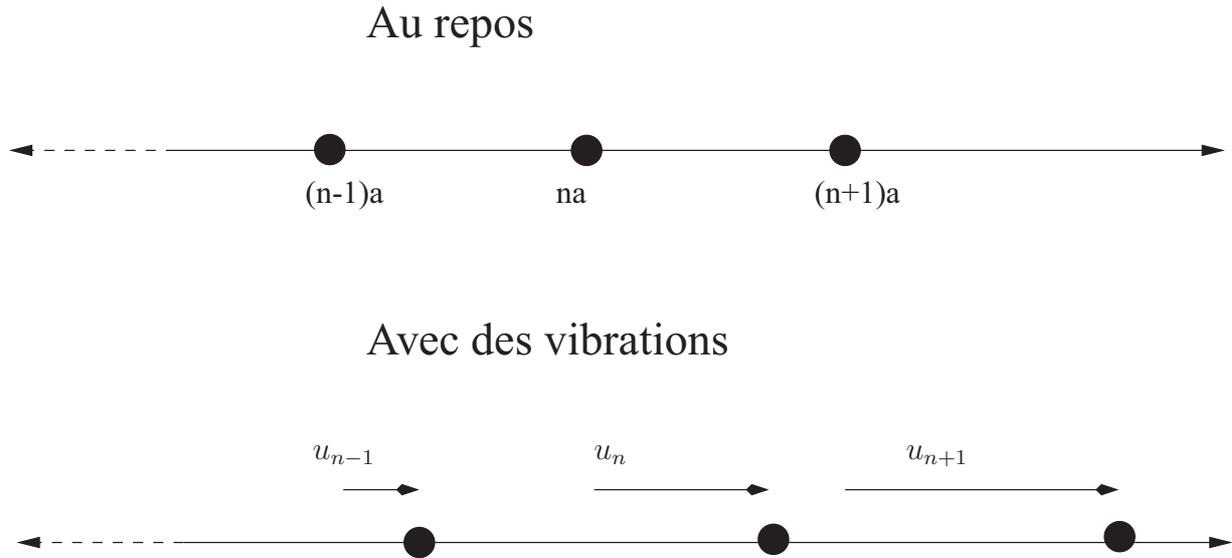


FIG. 6.3 – Réseau infini unidimensionnel monoatomique

Si l'on considère, comme c'est classiquement le cas, que les interactions entre les atomes sont de type "ressort" de constante " $\alpha$ ", que chaque atome considéré comme ponctuel possède une masse " $M$ ", qu'ils sont séparés par une distance " $a$ ", et que le déplacement du  $n^{ime}$  atome par rapport à la position d'équilibre s'écrit  $u_n$  alors on a facilement :

$$M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (6.50)$$

La méthode usuelle pour résoudre une telle équation est de postuler une solution de type "onde plane progressive monochromatique" de la forme suivante :

$$u_n = u_0 e^{j(\omega t - k_x n a)} \quad (6.51)$$

Lorsque l'on remplace dans les équations de propagation énoncées plus haut, on obtient ce que l'on appelle "équations de dispersion" : il s'agit ni plus ni moins que de relations (ici, compte-tenu de la simplicité de l'exemple on n'a qu'une seule relation) entre  $\omega$  la pulsation propre temporelle du système et  $k_x$  qui est la pulsation spatiale du système (appelée aussi vecteur d'onde, car en géométrie quelconque,  $k_x$  est en réalité un vecteur qui indique la direction de propagation de l'onde). L'équation de dispersion dans ce cas particulier est donc :

$$\omega^2 = \frac{2\alpha}{M} (1 - \cos(k_x a)) \quad (6.52)$$

Cette équation de dispersion indique que les pulsations spatiales et temporelles sont liées. De plus, toutes les pulsations vérifiant cette relation sont autorisées. Cependant, ce que l'on va montrer dans le paragraphe suivant, c'est qu'une zone beaucoup plus restreinte (finie !) d'étude permet de modéliser l'ensemble des déplacements : on appelle cette zone la première zone de Brillouin. Le rapport de deux plans successifs est donné par l'expression suivante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{jk_x a} \quad (6.53)$$

L'exponentielle complexe est une fonction périodique de période  $2\pi$ . Par conséquent, pour des valeurs de  $k_x a$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi; +\pi]$ , l'exponentielle prend toutes les valeurs indépendantes possibles. Ainsi, on a :

$$k_x \in \left[ \frac{-\pi}{a}; \frac{+\pi}{a} \right] \quad (6.54)$$

Ce domaine de valeurs est ce que l'on appelle la première zone de Brillouin. Les valeurs extérieures à la première zone de Brillouin reproduisent simplement des vibrations du réseau déjà décrites. Nous pouvons en effet par addition ou soustraction d'un multiple entier de  $\frac{2\pi}{a}$  toujours nous ramener à la première zone de Brillouin. Ainsi, le déplacement peut toujours être décrit par un vecteur d'onde situé dans la première zone de Brillouin.

### Remarque importante

Pour un système continu, on ne peut pas isoler de première zone de Brillouin finie, et pour cause, pour un milieu élastique continu, on a :

$$a \rightarrow 0 \quad (6.55)$$

et

$$K_{max} \rightarrow \pm\infty \quad (6.56)$$

C'est une différence essentielle entre les milieux discrets (éventuellement périodiques) et les milieux continus particulièrement importante du point de vue numérique.

## 6.4 Résultats numériques

### 6.4.1 Demi-espace discret soumis à une charge ponctuelle

L'objectif de ce paragraphe est de valider le modèle discret proposé, en montrant que ses prédictions converge vers celles d'un milieu élastique linéaire isotrope lorsque  $d$  tend vers zéro. On considère un demi-espace discret ( $h = +\infty$ ) soumis à une force ponctuelle statique ou mobile, d'une amplitude de  $10N$ . Ce demi-espace discret a des constantes homogénéisées de  $E = 100MPa$  et de  $\nu = 0.25$  (Eqs.(6.28,6.29)). La comparaison est présentée pour le déplacement vertical sur la ligne ( $y_1 = 0m, z_1 = 0.2m$ ) concernant la charge positionnée en ( $x_1 = 0m, y_1 = 0m, z_1 = 0m$ ).

Dans la Fig.(6.4), on compare le modèle discret à la solution analytique de Boussinesq,  $d$  variant de  $0.01m$  à  $0.08m$ .

Dans les Figs.(6.5,6.6), le modèle discret est comparé au modèle continu équivalent pour des charges mobiles à  $25m/s$  et à  $50m/s$ , tandis que ( $d$ ) varie de  $0.01m$  à  $0.08m$ .

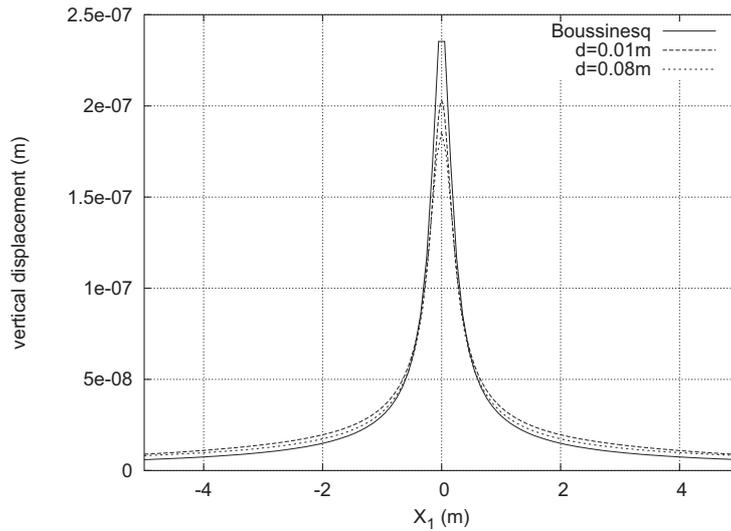


FIG. 6.4 – Validation statique ( $v=0.01\text{m/s}$ ) concernant le déplacement vertical de Boussinesq

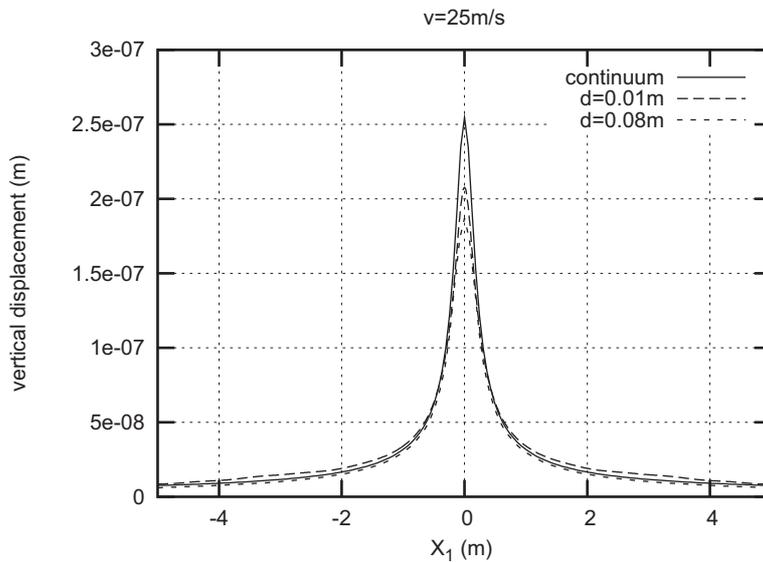


FIG. 6.5 – Validation dynamique à une vitesse de 25m/s

Les Figs.(6.4,6.5,6.6) montrent bien que le modèle discret est d'autant plus proche du milieu continu que la taille  $d$  du grain de ballast est petite.

Dans la Fig.(6.7), le modèle discret est comparé au modèle continu pour une vitesse élevée de  $100\text{m/s}$  pour un diamètre de grain variant de  $0.04\text{m}$  à  $0.08\text{m}$ . Dans la Fig.(6.8), la taille du diamètre du grain de ballast est fixée à  $0.04\text{m}$  tandis que la vitesse de la charge mobile varie de  $50\text{m/s}$  à  $120\text{m/s}$ .

Dans la Fig.(6.7), des oscillations sont d'autant plus significatives que la taille du grain est grande. Chaque pic de ces oscillations correspond à un grain de ballast.

Dans la Fig.(6.8), on remarque que le déplacement vertical augmente avec la vitesse de la charge mobile : par exemple, le déplacement pour  $120\text{m/s}$  est deux fois plus important que le déplacement pour  $50\text{m/s}$ . D'autre part, lorsque la vitesse devient assez élevée, des oscillations

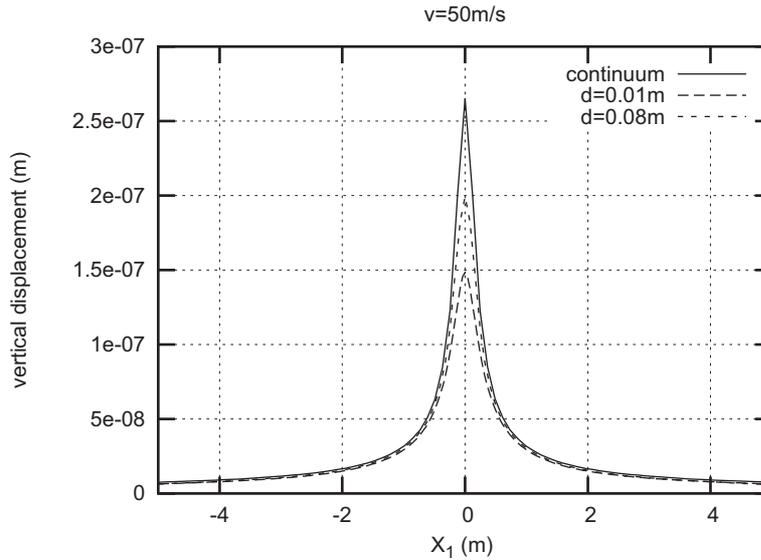


FIG. 6.6 – Validation dynamique à une vitesse de 50m/s

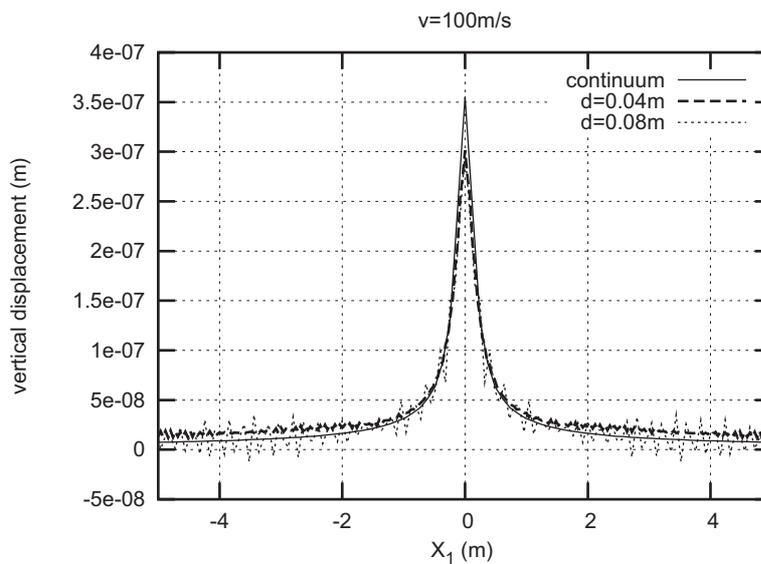


FIG. 6.7 – Influence du diamètre du grain de ballast

apparaissent (Figs.(6.7, 6.8)).

#### 6.4.2 Etude d'un bicouche discret/continu sous l'action d'une charge ponctuelle

Le but de ce paragraphe est d'étudier le modèle discret/continu (Fig.6.1) sous l'action d'une charge mobile ponctuelle d'intensité  $10kN$ . Plus particulièrement, il s'agira de mesurer l'influence du contraste des rigidités des deux couches lorsque  $h = 0.4m$  et  $d = 0.04m$ .

On présente une étude paramétrique concernant l'accélération verticale sur le trajet de la charge mobile ( $y = 0m$ ), mais sur la deuxième couche de grains ( $z = 0.04m$ ). En fait, ce

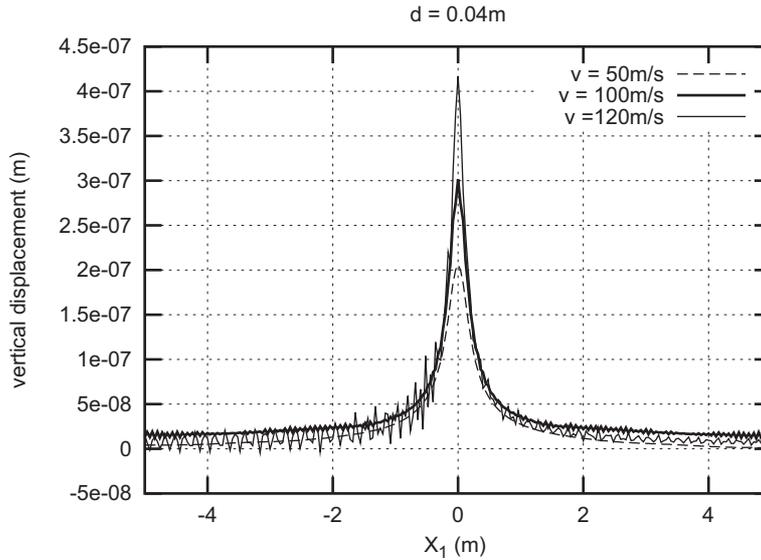


FIG. 6.8 – Influence de la vitesse pour un grain ayant un diamètre de 4cm

qui nous intéresse, c'est l'accélération vers le haut, et spécialement lorsque sa valeur devient voisine, voire dépasse celle de la gravité.

La fig.6.9 montre l'accélération verticale à une profondeur de  $0.04m$ , pour différents couples de valeurs pour les modules d'Young  $E_b$  du ballast et  $E_s$  du sol.

Pour des valeurs fixées de  $E_b$ , lorsque  $E_s$  augmente, l'accélération verticale maximale diminue.

Les tables (6.4.2, 6.4.2, 6.4.2) montrent le maximum de l'accélération verticale vers le haut pour différents couples de  $E_b$  et  $E_s$ . La table (6.4.2) concerne le bicouche continu/continu, alors que la table (6.4.2) concerne le bicouche mixte discret/continu. La table (6.4.2) présente la variation relative  $e$  entre ces deux modèles :

$$e = \frac{a_d - a_c}{a_c} \quad (6.57)$$

Dans les tables (6.1) et (6.2), pour une valeur de  $E_b$  fixée, et lorsque  $E_b$  augmente, l'amplitude de l'accélération décroît.

Pour une valeur fixée de  $E_s$ , lorsque  $E_b$  augmente, l'amplitude de l'accélération diminue. Lorsque la vitesse de la charge mobile augmente, l'amplitude de l'accélération verticale s'accroît.

Le minimum de  $e$  est atteint dès que les valeurs des rigidités entre le ballast et le sol en-dessous deviennent comparables.

Le maximum de  $e$  est atteint pour des faibles valeurs de  $E_s$ . La plupart des valeurs est aux alentours de 10%.

On remarquera aussi que  $e$  est positif en-dessous de la diagonale ( $E_s = E_b$ ), et négatif au-dessus de cette diagonale.

TAB. 6.1 – Accélérations verticales maximales à une profondeur de 0.04m pour le bicouche continu/continu (en  $m.s^{-2}$ )

$E_s$ (MPa)	Velocity = 50m/s				Velocity = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	0.915	0.575	0.455	0.385	4.70	3.20	2.55	2.15
100	0.750	0.450	0.340	0.280	3.35	1.95	1.50	1.25
150	0.695	0.395	0.295	0.245	2.95	1.650	1.20	1.05
200	0.665	0.370	0.270	0.220	2.80	1.50	1.10	0.890
500	0.615	0.320	0.225	0.175	2.55	1.30	0.895	0.695

TAB. 6.2 – Accélérations verticales maximales à une profondeur de 0.04m pour le bicouche discret/continu (en  $m.s^{-2}$ )

$E_s$ (MPa)	Velocity = 50m/s				Velocity = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	0.965	0.545	0.400	0.325	4.65	2.55	1.75	1.40
100	0.845	0.465	0.330	0.265	3.65	2.00	1.40	1.10
150	0.795	0.435	0.310	0.240	3.35	1.80	1.25	1.00
200	0.770	0.415	0.290	0.230	3.20	1.70	1.20	0.930
500	0.715	0.370	0.255	0.200	2.90	1.50	1.00	0.785

TAB. 6.3 – Variations relatives de l'accélération verticale maximale vers le haut

$E_s$ (MPa)	Velocity = 50m/s				Velocity = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	5%	-5%	-12%	-16%	-1%	-20%	-32%	-35%
100	13%	4%	-3%	-5%	9%	3%	-7%	-12%
150	14%	10%	5%	-2%	14%	9%	4%	-5%
200	16%	12%	7%	4%	14%	13%	9%	4%
500	16%	16%	13%	14%	14%	15%	12%	13%

### 6.4.3 Un bicouche mixte discret/continu soumis à une charge en M

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier le modèle mixte discret/continu soumis à une charge mobile (Fig.6.1), et en particulier de déterminer l'influence des différences de raideur entre les deux couches lorsque  $h = 0.4m$  et  $d = 0.04m$ . Une étude paramétrique est présentée pour l'observable "accélération verticale" sur la ligne ( $y_1 = 0m$ ,  $z_1 = 0.04m$ ). En effet, on s'intéresse à l'accélération vers le haut, surtout si elle est comparable, voire supérieure à la gravité.

Pour simuler cette force exercée sur le ballast causée par un bogie, Nguyen[55] a généralisé l'expression statique proposée par Alaoui and Naciri[2]. La force linéique (le long d'une

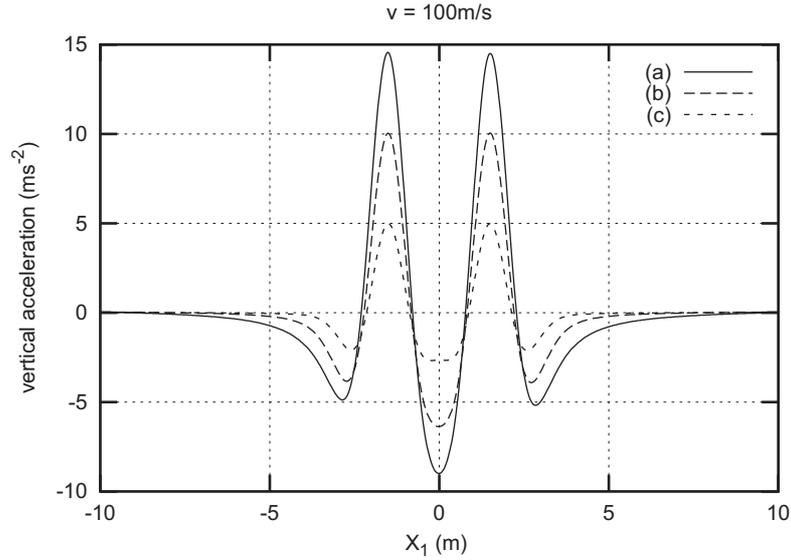


FIG. 6.9 – Accélération verticale pour le bicouche discret/continu soumis à une charge mobile en forme de “M” ((a)  $E_b = 100\text{MPa}$ ,  $E_s = 50\text{MPa}$ , (b)  $E_b = 100\text{MPa}$ ,  $E_s = 100\text{MPa}$ , (c)  $E_b = 100\text{MPa}$ ,  $E_s = 500\text{MPa}$ )

traverse) s’écrit :

$$f_i(x, y, t) = \frac{QY}{2b} [X^{(\frac{vt-a-x}{D})^2} + X^{(\frac{vt-2a-x}{D})^2}] H(b - |y|) \delta(x - vt) \underline{e}_z \quad (6.58)$$

où  $Q$  est l’amplitude de la charge mobile ( $17.10^4\text{N}$ ),  $X$  et  $Y$  sont des paramètres purement numériques compris entre 0 et 1 qui dépendent de la rigidité de la couche de ballast ;  $v$  désigne la vitesse du train,  $t$  le temps,  $D$  la distance entre deux traverses ( $0.6\text{m}$ ),  $a$  une distance critique ( $3\text{m}$ ),  $b$  la longueur des traverses,  $H$  la distribution de Heaviside, et  $\underline{e}_z$  le vecteur unitaire dans la direction (Oz).

Pour avoir la force par unité de surface (étant donné que la charge est répartie grâce aux rails sur une longueur infinie selon  $x_1$ ), on cherche la valeur du paramètre  $\alpha$  défini par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x, y, z, t) dx = \frac{Q}{2b} H(b - |y|) \quad (6.59)$$

De plus, on donne la valeur de l’intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (6.60)$$

On a donc l’expression de  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\ln(X)}}{2DY\sqrt{\pi}} \quad (6.61)$$

E(MPa)	10	30	60	80	100
X	0.82	0.715	0.64	0.625	0.61
Y	0.23	0.32	0.38	0.41	0.43

L'expression de la force surfacique moyennée selon  $x$  est donc :

$$f_s(x, y, z, t) = \alpha f_l(x, y, z, t) = \frac{Q}{4bD} [X^{(\frac{x+a-vt}{D})^2} + X^{(\frac{x+a+L-vt}{D})^2}] H(b - |y|) \frac{\sqrt{-\ln(X)}}{\sqrt{\pi}} \quad (6.62)$$

La force totale qui s'appliquera sur un grain de ballast s'écrira donc :

$$f_{1grain}(x, y, z, t) = f_s(x, y, z, t) d^2 \quad (6.63)$$

Ainsi, la transformée de Fourier de  $\underline{f}$  (Eq.(6.58)) s'exprime :

$$\hat{f}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{d^2}{2\sqrt{2\pi}} \frac{Qe^{-jk_x a}}{b} (1 + e^{-jk_x L}) e^{\frac{(k_x D)^2}{4\ln(X)}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sin(k_y b)}{k_y b} e^{jvt k_x} \delta(\omega - k_x V) \quad (6.64)$$

La charge mobile discrète associée s'écrit :

$$\underline{f}^{l,m,0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f} e^{-j(\omega t - k_x l d - k_y m d)} dk_x dk_y d\omega \quad (6.65)$$

La Fig.6.9 montre l'accélération verticale à la profondeur de  $0.04m$  pour différents couples de modules d'Young  $E_b$  pour le ballast et  $E_s$  pour le sol. Lorsque  $E_b$  est fixé, et lorsque  $E_s$  augmente, l'accélération verticale maximale s'accroît.

Les tableaux ((6.4),(6.5),(6.6)) montrent l'accélération verticale maximale vers le haut pour différentes valeurs de  $E_b$  et  $E_s$ . Le tableau (1) concerne le modèle continu/continu, tandis que le tableau (2) concerne le modèle discret/continu. Le tableau (3) présente l'erreur relative ( $e$ ) entre ces deux modèles :

$$e = \frac{a_d - a_c}{a_c} \quad (6.66)$$

où  $a_d$  désigne l'accélération pour le modèle discret/continu, et  $a_c$  celle pour le modèle continu/continu. Dans les tableaux (1) et (2), pour une valeur fixée de  $E_b$ , lorsque  $E_s$  augmente, l'amplitude de l'accélération décroît. Pour une valeur fixée de  $E_s$ , lorsque  $E_b$  augmente, l'amplitude de l'accélération décroît. Quand la vitesse de la charge mobile s'accroît, l'amplitude de l'accélération verticale augmente.

Le minimum de  $e$  est atteint lorsque les rigidités pour le ballast et le sol sont les mêmes ( $E_s = E_b$ ). Le maximum de  $e$  est atteint pour de faibles valeurs de  $E_s$ . la plupart des valeurs se trouvent entre 20 et 30%. On peut aussi également remarquer que  $e$  est positif en-dessous de la diagonale ( $E_s = E_b$ ), et négatif au-dessus.

Lorsqu'on compare les accélérations entre les approches discret/continu et continu/continu pour une vitesse de 100 m/s, et pour une rigidité de ballast de 200MPa, avec comme variable la rigidité du sol en-dessous du ballast, on constate que l'approche purement continue surestime très largement le cas mixte jusqu'au moment où la rigidité du ballast égale la rigidité du sol sous le ballast (Fig.6.10).

## 6.5 Conclusions

En définitive, on a proposé un modèle bicouche mixte discret/continu pour les voies ferrées ballastées, que l'on a résolu par une méthode semi-analytique. Ce modèle, qui concerne seulement deux couches, peut être étendu à un modèle multi-couches. La modélisation de bicouche

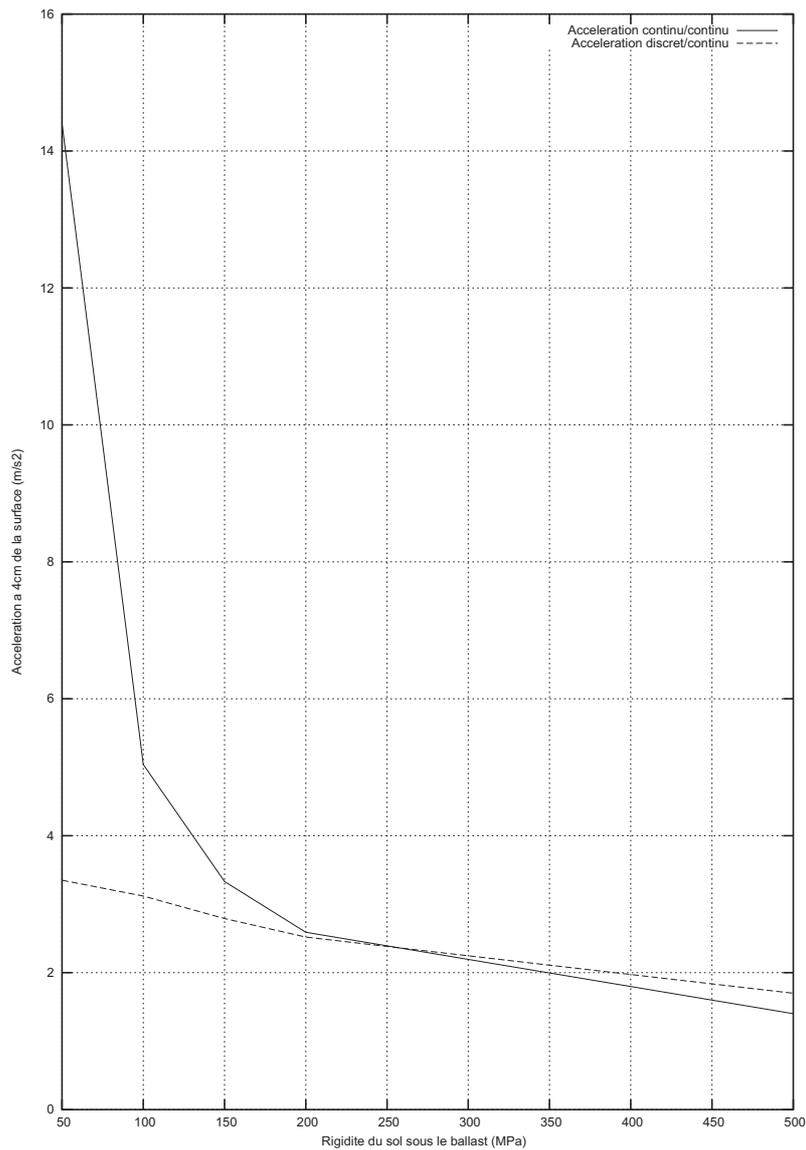


FIG. 6.10 – Comparaison entre les bicouches discret/continu et continu/continu pour une rigidité de ballast de 200MPa à 100m/s

TAB. 6.4 – Accélérations verticales maximales à une profondeur de 4cm pour le modèle continu/continu ( $m.s^{-2}$ )

$E_s$ (MPa)	vitesse = 50m/s				vitesse = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	2.59	2.04	1.79	1.63	125	25.4	17.9	14.4
100	1.58	1.18	1.03	0.938	8.59	6.51	5.59	5.04
150	1.27	0.903	0.768	0.694	6.00	4.33	3.69	3.33
200	1.12	0.761	0.636	0.568	5.05	3.43	2.89	2.59
500	0.859	0.508	0.393	0.334	3.69	2.12	1.63	1.40

TAB. 6.5 – Accélération verticale maximale à une profondeur de 4cm pour le modèle discret/continu ( $m.s^{-2}$ )

$E_s$ (MPa)	vitesse = 50m/s				vitesse = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	2.52	1.37	0.929	0.689	122	9.00	4.92	3.35
100	1.88	1.15	0.837	0.650	11.6	6.35	4.22	3.12
150	1.57	1.01	0.745	0.595	7.92	5.00	3.59	2.79
200	1.39	0.890	0.676	0.550	6.74	4.22	3.15	2.52
500	1.05	0.629	0.481	0.399	4.62	2.67	2.05	1.70

TAB. 6.6 – Variations relatives de l'accélération

$E_s$ (MPa)	vitesse = 50m/s				vitesse = 100m/s			
	$E_b$ (MPa)				$E_b$ (MPa)			
	50	100	150	200	50	100	150	200
50	-3%	-32%	-48%	-58%	-2%	-64%	-72%	-77%
100	18%	-2%	-18%	-31%	35%	-2%	-25%	-38%
150	23%	12%	-3%	-14%	32%	15%	-3%	-16%
200	24%	17%	6%	-3%	33%	23%	9%	-3%
500	22%	24%	22%	19%	25%	26%	26%	21%

a été validée : les prédictions de la modélisation discrète tendent vers celles des modélisations continues lorsque la taille moyenne des grains tend vers zéro. On remarquera que la vitesse de la charge appliquée sur la voie ainsi que la rigidité de la sous-couche ont des effets significatifs sur l'accélération et le déplacement verticaux dans la couche de ballast. Des comparaisons entre les modèles discret/continu et continu/continu montrent que les différences peuvent être très importantes : compte-tenu du chapitre précédent, peut-on en conclure que ces différences reflètent la nature discrète du ballast ?

# Conclusion de cette partie

Cette partie a été l'occasion de la construction de modèles simples bicouches, généralisant une approche développée par Suiker [79] dans un cas 2D d'un milieu granulaire reposant sur un sol rigide : la résolution semi-analytique de ces modèles a été possible grâce à leur caractère linéaire ainsi qu'à leur simplicité géométrique. La méthodologie retenue passe par l'utilisation de la transformée de Fourier qui suppose en effet que les équations différentielles du comportement soient des fonctions linéaires des dérivées du temps et de l'espace.

On a comparé dans cette partie des modèles bicouches mixtes discret/continu et continu/continu, l'idée étant de se demander quel est l'impact d'une ou l'autre des deux modélisations sur l'accélération. Les modélisations ont été construites de la même manière tant pour les types de modélisation, que pour les conditions aux limites à la surface, à l'interface entre le ballast et le sol en dessous, et enfin à l'infini.

Dans les deux cas 1D et 3D, on a pu calculer simplement les paramètres discrets des modèles en fonction des paramètres continus déjà connus. Grâce à cette identification, on a comparé d'une part les équations de dispersion des modèles mixtes discret/continu et continu/continu, et d'autre part les accélérations immédiatement sous la surface où avait lieu la sollicitation représentant le train.

Pour les modèles mixtes, l'étude des équations de dispersion montre que le réseau granulaire se comporte comme un filtre passe-bas : les hautes fréquences sont coupées d'autant plus que la taille des grains augmente et que le nombre de grains de la couche supérieure décroît, ce qui n'est pas le cas des modèles continu/continu.

En revanche, la correspondance entre les modèles se produit dès que la densité de grains du milieu discret augmente. D'une manière assez naturelle on retrouve dans tous les cas testés les résultats suivants :

- lorsque la vitesse de sollicitation de l'infrastructure s'accroît, l'accélération constatée augmente également.
- Dès que la rigidité des couches diminue, l'accélération est également augmentée.

Dans les cas mixtes discret/continu, le nombre de grains dans la couche discrète permet d'évaluer directement l'écart avec des modélisations continu/continu. Si on considère un nombre de grains voisin du nombre de grains constaté sur les voies ferrées, les différences pour le cas 1D sont minimales : le caractère "discret" est très peu présent<sup>2</sup>. Pour le cas 3D, ces différences peuvent être nettement plus importantes.

Ainsi, dans le cas 1D, il n'est pas nécessaire de construire des modèles discret/continu linéaires puisque les modèles continu/continu d'une part sont beaucoup plus simples et plus rapides et permettent en outre de trouver des résultats pratiquement identiques. Dans le cas 3D, on constate que si la fréquence de sollicitation, de même que le contraste des rigidités

---

<sup>2</sup>Les "phénomènes discrets" sont mesurés par l'écart entre les bicouches discret/continu et continu/continu pour une observable qui peut être le déplacement ou l'accélération

s'accroissent, le caractère "discret" augmente. Mais, peut-on en déduire que cela reflète mieux la réalité phénoménologique du ballast ?

En somme pour le dimensionnement de la voie ferrée, si l'on en croit la modélisation 1D, les paramètres pertinents sont : la hauteur de la couche de ballast, les rigidités, la masse volumique des couches de sol et la fréquence de sollicitation. Pour une modélisation 3D, il faut ajouter à la liste précédente le nombre de grains sur la hauteur de la couche de ballast.

L'avantage de cette démarche est sa grande simplicité et sa rapidité. Comme l'a montré par exemple V.H.Nguyen[55], les différences avec des modèles continus linéaires purement numériques sont faibles, même pour des vitesses élevées. En première analyse, compte tenu de sa légèreté, ces approches semi-analytiques peuvent être conseillées pour avoir une estimation des valeurs des déflexions et des accélérations in situ. Avec une charge statique éventuellement oscillante, le modèle 1D semi-analytique permet d'avoir une bonne estimation des ordres de grandeur. Pour une charge mobile et dans une ligne droite sans changement majeur dans la structure du sous-sol, le modèle 3D peut suffire si la structure du sous-sol est horizontale.

Toutefois, la démarche ne permet pas les réarrangements de grains. Les interactions utilisées sont exclusivement linéaires. De plus, pour mener à bien la démarche semi-analytique, la géométrie doit être très simple. C'est pourquoi on a développé dans la partie suivante une approche numérique par éléments finis qui permet d'une part de tenir compte de la géométrie de la voie, et d'autre part de mieux prendre en compte la non-linéarité du comportement du ballast.

## **Troisième partie**

# **Etudes linéaires et non-linéaires par éléments finis**



# Introduction de la partie sur les éléments finis

L'objectif de notre travail est la compréhension du comportement des voies ferrées ballastées afin de parvenir à la meilleure maintenance possible. La stratégie de résolution de ce problème est en deux étapes : la première consiste à relier l'accélération au tassement ; la seconde consiste à relier cette accélération aux caractéristiques de la voie ferrée et de la charge mobile (le train). La démarche expérimentale a permis de trouver des lois de tassement en fonction de l'accélération du blochet. Cette première étape doit être complétée par la seconde qui est l'étape de la modélisation. Dans la partie 2, une approche semi-analytique a été élaborée. En raison de leur simplicité et de leur rapidité, ces approches peuvent être privilégiées en première analyse pour donner des ordres de grandeurs de l'accélération.

Toutefois, les limites de cette méthode sont nombreuses qu'elles soient dues aux lois de comportement ou à la géométrie particulière retenue. C'est pourquoi on a développé dans cette partie une approche numérique par éléments finis qui permet d'une part de tenir compte de la géométrie de la voie, et d'autre part de mieux prendre en compte la non-linéarité du comportement du ballast.

Les modèles possibles sont nombreux. Ils peuvent être rangés dans différentes catégories pas forcément incompatibles de modèles :

- des modèles élastiques linéaires, linéaires par morceaux, c'est à dire en distinguant les zones du ballast concernées par la descente de charge (rigidité normale) et celles non chargée avec une faible rigidité ;
- des modèles unilatéraux : ces modèles permettent de rendre compte du caractère granulaire du ballast. deux grains en contact et en compression ont une interaction, alors que deux grains qui ne sont pas en contact n'ont pas d'interaction. La traction se manifeste par une interaction nulle.
- Des modèles globaux dans une maille, ou locaux (plus que discrets) que l'on a introduit dans le code de calcul CESAR-LCPC.
- Des modèles non-linéaires pour le ballast dont une modélisation a été proposée en régime quasistatique[55] ;
- et enfin des modèles d'amortissement numérique dont la variété ne doit pas masquer la difficulté de son appréciation.

Notre contribution dans cet échantillon de modèles est la construction de modèles "discrets", qu'on peut plutôt appeler "modèles locaux". Ils s'appuient sur l'approche semi-analytique 3D développée dans la partie précédente. En effet, la démarche énergétique "discrète" nous a semblé très proche d'une approche énergétique par éléments finis. Aussi avons nous pensé utiliser les caractéristiques de la maille élémentaire pour développer un "modèle éléments-finis local" dans le code de calcul CESAR v3.4 puis v4.0.

Notre contribution consiste également en l'évaluation des modèles disponibles pour la mo-

délisation de la voie ferrée. La proximité entre les modélisations et les expériences réalisées sur des bancs d'essai, de même que le temps de calcul feront partie des critères d'évaluation de ces modèles.

Cette partie se compose de trois chapitres : le premier est la construction " théorique" des éléments finis, le deuxième aborde la question de la validation de ces approches, et enfin le troisième traite de la comparaison avec des situations expérimentales réelles.

# Chapitre 7

## Construction de modèles continus et discrets par éléments finis : approches linéaires et non linéaires

### 7.1 Introduction

Dans le cas où l'on a un comportement non-linéaire des matériaux, ou bien une structure complexe, il est difficile d'utiliser des méthodes semi-analytiques comme dans la partie précédente : la méthode de éléments finis doit être envisagée. Les éléments finis sont une méthode de discrétisation d'équations différentielles avec des conditions aux limites (voir section 3).

Pourtant, plusieurs exigences existent pour l'étude dynamique des structures avec les éléments finis :

- des frontières artificielles doivent être introduites pour décrire l'influence des domaines extérieurs car la structure est modélisée que sur un tronçon fini.
- Le temps de calcul est très lié à la finesse du maillage, et plus particulièrement au nombre de degrés de liberté.
- Le régime stationnaire n'est atteint qu'après un certain temps de calcul, ie après une certaine distance de déplacement de la charge : la taille du maillage nécessaire doit être grande.
- Les schémas d'intégration numériques requièrent des pas de temps suffisamment petits pour assurer la stabilité.
- La taille des éléments doit être suffisamment petite par rapport aux longueurs des ondes de propagation dans la structure, afin que "tous les noeuds puissent voir passer les ondes et que les ondes puissent se propager". De façon équivalente, cette assertion spatiale se reformule classiquement de manière temporelle : "les pas de temps pour les calculs sont choisis de telle sorte que la charge ne peut pas se mouvoir plus loin que la taille d'un élément durant un pas de temps." Si on note  $\Delta t_{max}$  la valeur du pas de temps maximal de l'intégration numérique,  $L$  la longueur caractéristique d'un élément,  $v$  la vitesse de la charge mobile, et  $c$  la célérité intrinsèque du milieu étudié, l'assertion précédente se traduit par :

$$\Delta t_{max} = \frac{L}{\max(v, c)} \quad (7.1)$$

Souvent, il est préconisé de ne prendre qu'une fraction de cette valeur maximale. Les

auteurs recommandent de diviser cette valeur par 2, 5, 10 ou 20 suivant les utilisations. On prendra pour notre part un facteur 10, sans que théoriquement on puisse justifier a priori ce facteur. Seule l'expérience (donc a posteriori) permet de nous indiquer que ce facteur convient dans les cas étudiés dans cette thèse.

EKEVID [29, 28, 27] a réalisé des calculs transitoires non-linéaires en 2D par éléments finis en utilisant une technique de temps-espace adaptative basée sur la procédure de Galerkin discontinue. Les pas de temps et le maillage sont redéfinis à chaque instant de calcul à partir d'une estimation d'erreur.

Dans ce chapitre, l'objectif est la construction/reconstruction de matrices de rigidité, de comportement permettant une implémentation dans le code d'éléments-finis CESAR-LCPC.

La loi linéaire élastique homogène isotrope 3D est très utilisée pour les éléments finis en dynamique des milieux continus. Sa description (relativement simple) permet de mieux faire comprendre des lois plus élaborées. Cette loi sera d'ailleurs utilisée comme référence dans les simulations du chapitre suivant.

Comme les grains de ballast n'exercent entre eux des liens que lorsqu'ils sont en contact, V.H.Nguyen [55] a introduit dans une modélisation continue des effets unilatéraux linéaires puis non-linéaires.

S'appliquant d'abord à l'ensemble des matériaux présents dans un modèle de voie ferrée, les lois de comportement introduites par V.H.Nguyen dans CESAR ont pu être dédiées à un seul composant de la voie dans le cadre de notre travail.

En outre, prenant appui sur la description d'un élément de maille discret 3D dans le chapitre précédent, il nous est apparu intéressant, en utilisant le même élément, d'en faire un usage dans le cadre des éléments finis. Y a-t-il des différences entre une approche discrétisée (éléments finis) d'un modèle continu, et l'approche discrète directe ? De même que dans le cadre des éléments continus, on a voulu introduire, afin de respecter la nature unilatérale des grains de ballast, des effets unilatéraux discrets linéaires puis non-linéaires. Est-ce que ces différents développements seront utilisés dans le cadre des études de structures de voies ferrées ? Peut-on montrer des domaines d'intérêt des différentes méthodes ?

Ainsi, la progression de ce chapitre va être la suivante : après avoir rappelé quelques exemples d'algorithme de résolution pour les éléments finis, on re-construira la famille d'éléments finis continus linéaires isotropes. Cela nous permettra de mettre en place simplement la démarche d'élaboration des éléments finis plus complexes : familles d'éléments finis discrets linéaires (BL8<sup>1</sup>), continus unilatéraux avec non-linéarités éventuelles, ou encore discrets unilatéraux avec non-linéarités éventuelles (BNL8<sup>2</sup>).

## 7.2 Algorithmes de résolution des équations issues des éléments finis

### 7.2.1 Problèmes stationnaires

Ce sont des problèmes qui ne font pas intervenir le temps. Les équations peuvent s'exprimer de la manière suivante :

---

<sup>1</sup>BL8 = Ballast Linéaire à 8 noeuds

<sup>2</sup>BNL8 = Ballast Non Linéaire à 8 noeuds

$$\underline{F} = \underline{K}(\underline{U})\underline{U} \quad (7.2)$$

$\underline{F}$  est la force appliquée au domaine (connue),  $\underline{K}$  est la matrice de rigidité (connue), et  $\underline{U}$  est le déplacement (inconnu).

Dans le cas linéaire, qui correspond à  $\underline{K}(\underline{U}) = \underline{K}$  (indépendant de  $\underline{U}$ ), on résout usuellement 7.2 par diverses méthodes [26] :

- méthode directe : triangularisation ou décomposition de  $\underline{K}$  de type Cholesky
- méthode de Gauss ou Gauss-modifiée (selon qu'on utilise des méthodes d'addition ou de substitution dans l'algorithme de Gauss)
- algorithme de résolution par décompositions successives

Dans le cas non-linéaire, la recherche de la solution s'effectue de manière itérative[26].

Plusieurs méthodes sont possibles : on décrit ici la méthode par substitution, celle de Newton-Raphson modifiée, et celle de Newton-Raphson.

### Méthode de résolution par substitution

Soit le problème suivant : Le principe de résolution de (7.2) est le suivant :

$$\underline{F} = \underline{K}(\underline{U}_i)\underline{U}_{i+1} \quad (7.3)$$

En fait, le principe est d'exprimer l'étape  $i + 1$  en fonction de l'étape  $i$ .

En pratique, on définit le résidu de l'opération  $i$  (noté  $\underline{R}_i$ ) ainsi que l'incrément de déplacement  $\underline{\Delta U}_i$  :

$$\underline{R}_i = \underline{R}(\underline{U}_{i-1}) = \underline{F} - \underline{K}(\underline{U}_{i-1})\underline{U}_{i-1} \quad (7.4)$$

$$\underline{\Delta U}_i = \underline{U}_i - \underline{U}_{i-1} \quad (7.5)$$

Par conséquent, on a :

$$\underline{R}_i = \underline{K}(\underline{U}_{i-1})\underline{\Delta U}_i \quad (7.6)$$

C'est cette équation que l'on inverse pour obtenir la solution.

### Méthode de Newton-Raphson modifiée

Cette méthode s'applique lorsque les non-linéarités sont faibles, comme on va le voir dans ses hypothèses.

Pour la méthode de Newton-Raphson modifiée, on part de l'équation 7.6 :

$$\underline{R}_i = \underline{K}(\underline{U}_{i-1})\underline{\Delta U}_i \quad (7.7)$$

On décompose alors la matrice de rigidité en deux parties : une partie linéaire et une partie non-linéaire. On obtient :

$$\underline{K} = \underline{K}_L + \underline{K}_{NL} \quad (7.8)$$

De plus, on se place en faibles non-linéarités, ce qui signifie :

$$\|\underline{K}_{NL}\| \ll \|\underline{K}_L\| \quad (7.9)$$

Par conséquent, le reste s'écrit désormais :

$$\underline{R}_i = \underline{K}_L \Delta U_i \quad (7.10)$$

En fait, on a linéarisé l'équation d'incrémentation pour calculer l'incrément de déplacement. L'avantage de cette manipulation est d'avoir une inversion qui sera identique à toutes les itérations. Cependant, le reste d'ordre  $i$  continue d'être évalué par 7.6. La non-linéarité n'est donc pas complètement supprimée.

### Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson suppose qu'à l'ordre  $i$  le reste est non nul, et qu'à l'ordre suivant, il est nul. De plus, elle est fondée sur un développement au premier ordre du reste d'ordre  $i + 1$  défini plus haut :

$$\underline{R}_{i+1} = \underline{R}(U_i) = 0 \quad (7.11)$$

$$\simeq \underline{R}(U_{i-1}) + \left( \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}=U_{i-1}} \Delta U_i \quad (7.12)$$

En posant :

$$\underline{K}_T(U_{i-1}) = - \left( \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}} \right)_{\underline{U}=U_{i-1}} \quad (7.13)$$

où  $\underline{K}_T$  est appelée "matrice de rigidité tangente" du problème. Il vient :

$$\underline{R}(U_{i-1}) = \underline{K}_T(U_{i-1}) \Delta U_i \quad (7.14)$$

De plus, pour une même itération, on a :

$$\underline{K}_T(\underline{U}) = \underline{K}(\underline{U}) + \left( \frac{\partial \underline{K}}{\partial \underline{U}} \right) \cdot \underline{U} - \left( \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \right) \quad (7.15)$$

On observe que la convergence est assez rapide, même pour des cas fortement non-linéaires.

### 7.2.2 Problèmes non-stationnaires

Après discrétisation, un problème non-stationnaire (problème dépendant du temps) classique s'écrit [26] :

$$\underline{M}\ddot{\underline{U}} + \underline{C}\dot{\underline{U}} + \underline{K}\underline{U} = \underline{F}(t) \quad (7.16)$$

Avec les conditions initiales :  $\underline{U}(t = 0) = \underline{U}_0$  et  $\dot{\underline{U}}(t = 0) = \dot{\underline{U}}_0$

On a de plus :

- $\underline{M}$  s'appelle la matrice de masse (pour des questions d'homogénéité)
- $\underline{C}$  est la matrice d'amortissement
- $\underline{K}$  est la matrice de rigidité
- $\underline{U}$  est le vecteur solution
- $\underline{F}(t)$  est le vecteur des sollicitations

On cherche  $\underline{U}, \dot{\underline{U}}$  et  $\ddot{\underline{U}}$  à différents instants  $t$  vérifiant la relation 7.16.

On utilise des algorithmes fondés sur les “développements limités” de type “Taylor”. Les schémas de Newmark appartiennent à cette catégorie. Ils s’écrivent de la manière suivante :

$$\underline{U}_{t+\Delta t} = \underline{U}_t + \Delta t \dot{\underline{U}}_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1-b)\ddot{\underline{U}}_t + b\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}] \quad (7.17)$$

$$\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{U}}_t + \Delta t [(1-a)\ddot{\underline{U}}_t + a\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t}] \quad (7.18)$$

$\Delta t$  représente le pas de temps. Les différents schémas de la famille Newmark correspondent à des valeurs particulières de  $a$  et  $b$ .

Pour ces problèmes non-stationnaires, on utilise usuellement une matrice de rigidité dynamique ( $\underline{KD}$ ) définie par :

$$\underline{KD} = \underline{M} + a\Delta t \underline{C} + b\frac{(\Delta t)^2}{2} \underline{K} \quad (7.19)$$

Dans le cas linéaire, la matrice de rigidité dynamique ( $\underline{KD}$ ) ne dépend pas de  $\underline{U}$ , est calculée et n’est inversée qu’une fois pour tous les pas de temps.

L’étude de la stabilité et de la convergence de ces algorithmes peut être effectuée.

Comme dans le cas stationnaire non-linéaire, ( $\underline{KD}$ ) est une fonction de  $\underline{U}$  : il va falloir rechercher la solution par itérations successives[26]. Il faut utiliser également une autre itération qui portera sur le pas de temps. La notation  $X_n^{(k)}$  signifie la grandeur  $X$  pour le  $n^{ième}$  pas de temps à la  $k^{ième}$  itération qu’on appellera itération de précision.

Le principe de l’algorithme est le suivant :

1. On initie la solution pour l’incrément  $(n+1)$  en choisissant  $\underline{U}_{n+1}^{(0)} = \underline{U}_n$ . La vitesse et l’accélération qui correspondent à cette valeur de  $\underline{U}_{n+1}^{(0)}$  sont :

$$\dot{\underline{U}}_{n+1}^{(0)} = \left(1 - \frac{2a}{b}\right) \dot{\underline{U}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{a}{b}\right) \ddot{\underline{U}}_n \quad (7.20)$$

$$\ddot{\underline{U}}_{n+1}^{(0)} = \frac{-2}{b\Delta t} \dot{\underline{U}}_n + \left(1 - \frac{1}{b}\right) \ddot{\underline{U}}_n \quad (7.21)$$

2. A chaque itération de précision, on évalue le reste (ou résidu) par :

$$\underline{R}_{n+1}^k = \underline{M}\ddot{\underline{U}}_{n+1}^k + \underline{C}\dot{\underline{U}}_{n+1}^k + \underline{K}\underline{U}_{n+1}^k - \underline{F}_{n+1} \quad (7.22)$$

3. On fait l’hypothèse que si le résidu d’ordre  $k$  n’est pas nul, celui d’ordre  $k + 1$  le sera. En faisant (comme dans le cas stationnaire non-linéaire) un développement limité au premier ordre sur le résidu, il vient :

$$\underline{R}_{n+1}^{k+1} = 0 \quad (7.23)$$

$$\simeq \underline{R}_{n+1}^k + \left(\frac{\partial \underline{R}_{n+1}^k}{\partial \underline{U}}\right) \Delta \underline{U}_{n+1}^{k+1} \quad (7.24)$$

En posant :

$$\underline{K}_{\underline{T}}^k = \left(\frac{\partial \underline{R}_{n+1}^k}{\partial \underline{U}}\right) \quad (7.25)$$

où  $\underline{\underline{K}}_T$  est appelée “matrice de rigidité tangente” du problème. Il vient :

$$\underline{\underline{R}}_{n+1}^k = \underline{\underline{K}}_T^k \underline{\underline{\Delta U}}_{n+1}^{k+1} \quad (7.26)$$

4. De plus, pour une même itération, on a :

$$\underline{\underline{K}}_T^k = \frac{2}{b(\Delta t)^2} \underline{\underline{M}} + \frac{2a}{b\Delta t} \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}^k \quad (7.27)$$

5. Les nouveaux vecteurs déplacement, vitesse et accélération seront donc :

$$\underline{\underline{U}}_{n+1}^{k+1} = \underline{\underline{U}}_{n+1}^k + \underline{\underline{\Delta U}}_{n+1}^{k+1} \quad (7.28)$$

$$\underline{\underline{\dot{U}}}_{n+1}^{k+1} = \underline{\underline{\dot{U}}}_{n+1}^k + \frac{2a}{b\Delta t} \underline{\underline{\Delta U}}_{n+1}^{k+1} \quad (7.29)$$

$$\underline{\underline{\ddot{U}}}_{n+1}^{k+1} = \underline{\underline{\ddot{U}}}_{n+1}^k + \frac{2}{b(\Delta t)^2} \underline{\underline{\Delta U}}_{n+1}^{k+1} \quad (7.30)$$

Dans le cas non-linéaire, la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée à chaque pas de temps et la matrice tangente doit être calculée à chaque itération.

Avec cette méthode, il est difficile d'évaluer la stabilité et la convergence de l'algorithme. Ce qu'on peut dire, c'est qu'il ne faut pas se placer trop loin de la solution pour éviter des divergences grossières.

## 7.3 Discrétisation d'un problème d'élastodynamique linéaire continu

Ce cas, classique et bien connu, est l'occasion de rappeler les grandes étapes de la construction d'un modèle éléments finis. Ces différentes étapes seront réutilisées dans les méthodes plus complexes.

### 7.3.1 Méthode variationnelle

Soit  $\Omega \subset \mathfrak{R}^3$  un domaine continu dont la frontière est  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_F$ . Les conditions aux limites sont les forces appliquées sur  $\Gamma_F$  et le déplacement (nul ici) imposé sur  $\Gamma_u$ . On écrit les différentes équations liées à un problème de mécanique bien posé avec la notation indicielle :

$$\text{dans } (\Omega), \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.31)$$

$$\text{dans } (\Gamma_u), \forall i \in \{1, 2, 3\}, u_i = U_i \quad (7.32)$$

$$\text{dans } (\Gamma_F), \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \sigma_{ij} n_j = F_i \quad (7.33)$$

$$\text{dans } (\Omega), \forall (i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4, \sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (7.34)$$

L'équation 7.31 s'appelle équation de la dynamique, 7.32 la condition aux limites en déplacement, 7.33 la condition en forces, et 7.34 la loi de comportement linéaire. On rappelle que :  $\sigma_{ij,j}$  est la dérivée de la  $(i, j)$ <sup>ième</sup> composante du tenseur des contraintes de Cauchy par rapport à la  $j$ <sup>ième</sup> coordonnée,  $f_i$  la  $i$ <sup>ième</sup> composante de la résultante des forces volumiques,  $\rho$  la masse volumique,  $u_i$  la  $i$ <sup>ième</sup> composante du déplacement,  $U_i$  la  $i$ <sup>ième</sup> composante du

déplacement imposé,  $n_j$  la  $j^{\text{ième}}$  composante de la normale sortante,  $F_i$  la  $i^{\text{ième}}$  composante de la force imposée,  $a_{ijkl}$  la  $(i, j, k, l)^{\text{ième}}$  composante du tenseur de comportement d'ordre 4 (linéaire),  $\epsilon_{kl}$  la  $(k, l)^{\text{ième}}$  composante du tenseur des déformations.

Par intégration sur tout le domaine  $\Omega$ , l'équation 7.31 devient :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV \quad (7.35)$$

où :  $\delta u_i$  est un petit élément de déplacement. De plus, en utilisant l'intégration par parties :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (7.36)$$

Par surcroît :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV &= \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij} \delta u_i) n_j dS \text{ (Théorème d'Ostrogradski)} \\ &= \int_{\Gamma_F} F_i \delta u_i dS + \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ij} \delta u_i) n_j dS \\ &= \int_{\Gamma_F} F_i \delta u_i dS \text{ (grâce à 7.33)} \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \\ &= \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} dV \text{ (grâce à 7.34)} \end{aligned} \quad (7.38)$$

En utilisant les équations (7.35), (7.36), (7.37) et (7.38), on obtient la formulation variationnelle provisoire suivante :

$$\xi = \int_{\Gamma_F} F_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i dV - \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV = 0 \quad (7.39)$$

### 7.3.2 Construction d'une fonction d'interpolation pour des éléments hexaédriques (de la forme d'un parallélépipède rectangle, "MTH8" dans la nomenclature du code CESAR-LCPC)

Une fonction d'interpolation est l'outil de base pour passer d'une solution continue à une approximation discrète par la méthode des éléments finis. Elle permet de reconstruire le champ de déplacement solution à l'aide des valeurs aux noeuds.

Pour pouvoir utiliser simplement le code "CESAR", on construit un champ de déplacement continu et même dérivable qui interpole l'ensemble des noeuds d'un parallélépipède rectangle. Le plus simple pour cette construction (et également le moins coûteux en temps de calcul), est de chercher une fonction d'interpolation trilineaire. Les éléments de type "Lagrange complet" conviennent. Ils se mettent sous la forme suivante :

$$N(x, y, z) = N_i(x) \times N_j(y) \times N_k(z) \quad (7.40)$$

$$N_i(\alpha) = \prod_{r=1, r \neq i}^{r=8} \frac{\alpha_r - \alpha}{\alpha_r - \alpha_i} \quad (7.41)$$

Ces fonctions d'interpolations ( $N_i$ ) doivent vérifier :

$$\forall i, N_i(x_i, y_i, z_i) = 1 \quad (7.42)$$

$$\forall i, \forall j \neq i, N_i(x_j, y_j, z_j) = 0 \quad (7.43)$$

### 7.3.3 Passage des fonctions d'interpolation à la matrice d'interpolation

Le déplacement à l'intérieur du parallélépipède rectangle est une combinaison linéaire des déplacements des noeuds construite à l'aide des fonctions d'interpolation. Cela s'exprime de la manière suivante<sup>3</sup>

$$\tilde{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y, z) u_i \quad (7.47)$$

$$\tilde{v}(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y, z) v_i \quad (7.48)$$

$$\tilde{w}(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y, z) w_i \quad (7.49)$$

En notant  $\underline{\tilde{U}}$  le vecteur déplacement approché et  $\underline{\underline{N}}$  la matrice d'interpolation, il vient :

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{\underline{N}} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{uu} & \underline{N}_{uv} & \underline{N}_{uw} \\ \underline{N}_{vu} & \underline{N}_{vv} & \underline{N}_{vw} \\ \underline{N}_{wu} & \underline{N}_{wv} & \underline{N}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}, \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix}$$

Par la suite, pour des commodités d'utilisation, le vecteur déplacement approché sera noté seulement  $\underline{U}$  à la place de  $\underline{\tilde{U}}$ . Les fonctions d'interpolation permettent de calculer la défor-

<sup>3</sup>On notera que :

$$\tilde{u}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^8 N_i(x_i, y_i, z_i) u_i = u_i \quad (7.44)$$

$$\tilde{v}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^8 N_i(x_i, y_i, z_i) v_i = v_i \quad (7.45)$$

$$\tilde{w}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^8 N_i(x_i, y_i, z_i) w_i = w_i \quad (7.46)$$

mation  $\underline{\epsilon}$  approchée (notation de Voigt)<sup>4</sup> à partir des déplacements aux noeuds par la relation suivante :

$$\underline{\epsilon} = \underline{\underline{B}} \underline{U} \quad (7.50)$$

où :  $\underline{\underline{B}}$  est un tenseur du second ordre. La relation tensorielle de comportement équivaut, avec la notation de Voigt, à une relation matricielle entre le vecteur des contraintes  $\underline{\sigma}$  et le vecteur des déformations  $\underline{\epsilon}$  par le biais de  $\underline{\underline{D}}$ , matrice de comportement :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\epsilon} \quad (7.51)$$

$$= \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{U} \quad (7.52)$$

Ainsi, l'équation 7.39 devient avec les fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned} \xi_i = & \quad {}^t \delta \underline{U} \left[ \int_{\Gamma_F} {}^t \underline{\underline{N}} \underline{F} dS + \int_{\Omega} {}^t \underline{\underline{N}} \underline{f} dV \right] \\ & - {}^t \delta \underline{U} \left[ \int_{\Omega} {}^t \underline{\underline{N}}^t \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{N}} dV \right] \underline{U} - {}^t \delta \underline{U} \left[ \int_{\Omega} \rho {}^t \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} dV \right] \ddot{\underline{U}} = 0 \end{aligned} \quad (7.53)$$

Ainsi, on peut mettre (7.53) sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = \underline{G} \quad (7.54)$$

avec :

- $\underline{\underline{M}}$ , matrice de masse, définie par :  $\underline{\underline{M}} = \int_{\Omega} \rho {}^t \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} dV$
- $\underline{\underline{K}}$ , matrice de rigidité, définie par :  $\underline{\underline{K}} = \int_{\Omega} {}^t \underline{\underline{N}}^t \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{N}} dV$
- $\underline{G}$ , vecteur des contributions extérieures et volumiques, défini par :  $\underline{G} = \int_{\Gamma_F} {}^t \underline{\underline{N}} \underline{F} dS + \int_{\Omega} {}^t \underline{\underline{N}} \underline{f} dV$

Pour plus de généralité, on introduit la matrice  $\underline{\underline{C}}$  d'amortissement. L'équation différentielle à résoudre devient donc :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = \underline{G} \quad (7.55)$$

Le calcul de cette matrice est, dans le cas général, mal connu. Il existe cependant des modèles d'amortissement qui définissent  $\underline{\underline{C}}$  en fonction (notamment) des matrices de masse et de rigidité : on peut citer par exemple l'amortissement de Rayleigh qui indique que la matrice  $\underline{\underline{C}}$  est une combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux scalaires,  $\underline{\underline{C}}$  se traduit par :

$$\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}} \quad (7.56)$$

<sup>4</sup>On rappelle que la notation de Voigt est une notation qui, en utilisant les différentes symétries des tenseurs de déformation, de contrainte, et de comportement, permet de ramener les tenseurs de déformation et de contrainte à des simples vecteurs, alors que le tenseur des déformations devient une matrice. Les vecteurs de déformation et de contrainte se mettent par convention sous la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \text{ et } : \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

## 7.4 Construction de la matrice de rigidité d'un élément discret linéaire BL8

Etant donné la répartition sur un réseau des grains de ballast dans l'approche semi-analytique 3D de la partie précédente, on a pensé réutiliser la modélisation pour élaborer une famille discrète d'éléments finis.

Pour construire la matrice de rigidité associée aux éléments BL8, on considère l'énergie totale contenue dans un cube BL8, et toutes les interactions qui y sont liées.

Pour alléger les notations avec indices multiples, on réécrit l'énergie en fonction de la figure 7.1, sachant de plus que les déplacements selon x seront notés u, ceux selon y, v, et selon z, w.

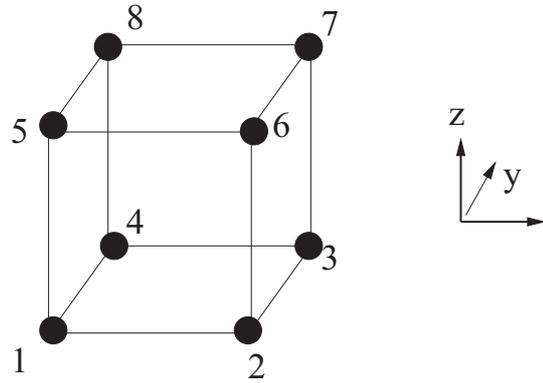


FIG. 7.1 – Nouvelle numérotation pour l'élément BL8

De plus, étant donné qu'une barre sur une arête est partagée par quatre cubes, la contribution de cette barre sera divisée par quatre. De même, lorsque les barres se trouvent sur les faces du cube, cette énergie est divisée par deux, car la barre est partagée uniquement entre deux cubes.

### 7.4.1 Expression de l'énergie du cube BL8

L'énergie totale du cube  $E_{tc}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E_{tc} = & E_{1-2} + E_{1-3} + E_{1-4} + E_{1-5} + E_{1-6} + E_{1-8} + E_{2-3} + E_{2-4} + E_{2-5} + E_{2-6} \\
 & + E_{2-7} + E_{3-4} + E_{3-6} + E_{3-7} + E_{3-8} + E_{4-7} + E_{4-8} + E_{4-5} + E_{5-6} + E_{5-7} \\
 & + E_{5-8} + E_{6-8} + E_{6-7} + E_{7-8} \quad (7.57)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'ensemble des déplacements, il vient :

$$\begin{aligned}
 E_{tc} = & \frac{1}{2} \frac{k}{4} (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (v_4 - v_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (w_5 - w_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (v_2 - v_3)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (w_6 - w_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (u_3 - u_4)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (w_7 - w_3)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (w_8 - w_4)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (u_6 - u_5)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (v_8 - v_5)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (v_7 - v_6)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{4} (u_7 - u_8)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_1 - u_3 + v_1 - v_3)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_1 - u_6 + w_1 - w_6)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (v_1 - v_8 + w_1 - w_8)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_2 - u_4 - v_2 + v_4)^2
 \end{aligned}$$

## 7.4 Construction de la matrice de rigidité d'un élément discret linéaire BL811

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_2 - u_5 - w_2 + w_5)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (v_2 - v_7 + w_2 - w_7)^2 \\
& + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (w_3 - w_6 - v_3 + v_6)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_3 - u_8 - w_3 + w_8)^2 \\
& + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_4 - u_7 + w_4 - w_7)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (w_4 - w_5 - v_4 + v_5)^2 \\
& + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_5 - u_7 + v_5 - v_7)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{4} (u_6 - u_8 - v_6 + v_8)^2
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Si on développe, on obtient des termes du deuxième degré, et de valuation 2 (plus petit degré constaté) par rapport aux déplacements  $u_i u_j$ ,  $u_i v_j$ ,  $u_i w_j$ ,  $v_i v_j$ ,  $v_i w_j$ , et  $w_i w_j$ .

### 7.4.2 Construction de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité est définie par la relation suivante :

$$E_{tc} = {}^t \underline{\underline{U}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} \tag{7.59}$$

Par conséquent, si on note  $K_{ij}$  la coordonnée de  $\underline{\underline{K}}$  à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$  et  $E_{tc-ij}$  l'énergie projetée sur  $e_i e_j$  ( $e_i$  désignant ici  $u, v$ , et  $w$ ), il vient :

$$E_{tc-ii} = e_i K_{ii} e_i \tag{7.60}$$

$$E_{tc-ij} = e_i K_{ij} e_j \tag{7.61}$$

Comme on veut que  $\underline{\underline{K}}$  soit symétrique, on a :

$$E_{tc-ii} = e_i K_{ii} e_i \tag{7.62}$$

$$E_{tc-ij} = \frac{1}{2} [e_i K_{ij} e_j + e_i K_{ji} e_j] \tag{7.63}$$

$$K_{ij} = K_{ji} \tag{7.64}$$

Ainsi, on a un moyen simple de reconstituer la matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}}$ , à partir de l'expression de l'énergie potentielle dans le cube de BL8. Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & K_{uw} \\ {}^t K_{uu} & K_{vv} & K_{vw} \\ {}^t K_{uu} & {}^t K_{vv} & K_{ww} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{K}}$  est une matrice  $24 \times 24$ , chacun de ses coefficients est une matrice  $8 \times 8$  symétrique. Ils s'expriment d'ailleurs sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}}_{uu} = E \cdot d \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 3 & -1 & -1 & 0 \\ & & & & & 3 & 0 & -1 \\ & & & & & & 3 & -1 \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{vv} = E.d \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 & -1 & -1 \\ & & & & & 3 & -1 & -1 \\ & & & & & & 3 & 0 \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{ww} = E.d \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ & & & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & & 3 & 0 \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{uv} = E.d \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{uw} = E.d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{vw} = E.d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

## 7.5 Construction de la matrice de rigidité dans les cas unilatéraux pour des interactions linéaires ou non

### 7.5.1 Pourquoi faut-il construire des modèles unilatéraux éventuellement non-linéaires ?

D'après les tests triaxiaux de traction-compression[55], le ballast est un matériau fortement non-linéaire. D'autre part, le ballast est un matériau "frottant". Ce "frottement" des grains les uns avec les autres donne sa cohésion à l'amas granulaire. C'est pourquoi on ne peut pas comparer le ballast "neuf" avec des billes de verre lisses. Toutefois, cet aspect "frottement" intergrains est en général mal pris en compte ([85]). Le frottement est en général la variable numérique d'ajustement. Dans la suite de mon travail, on présentera quelques modèles d'amortissement, mais ils demeurent très largement insatisfaisants.

Enfin, le ballast est un matériau unilatéral, avec une rigidité très faible en traction. Cet aspect unilatéral se comprend bien : lorsque les grains sont en contact, il y a interaction ; lorsqu'ils ne le sont pas, l'interaction est négligeable comparée aux autres forces existant dans l'amas de grains. Les deux relations suivantes définissent ces effets sans tension dans un cas 1D :

$$\sigma = k\epsilon, \text{ si } \epsilon \leq 0 \quad (7.65)$$

$$\sigma = 0, \text{ si } \epsilon > 0 \quad (7.66)$$

$\sigma$  et  $\epsilon$  sont respectivement les contrainte et déformation. Lorsque  $k$  est constant,  $\sigma$  est linéaire par morceaux comme l'illustre la figure (7.2).

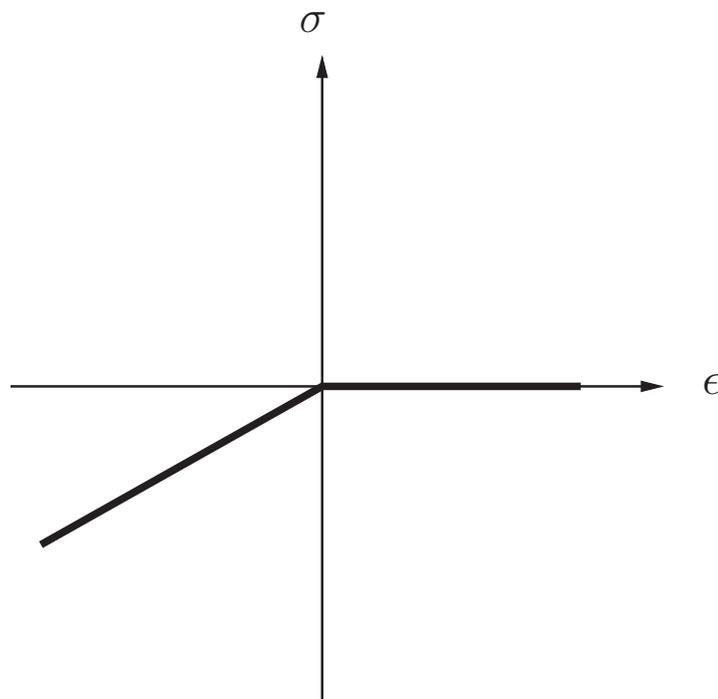


FIG. 7.2 – Relation linéaire unilatérale sans tension dans le cas 1D

Pour le cas 3D continu, étant donné la difficulté d'imposer une force normale à une surface granulaire, Nguyen et al. [53] ont été obligés de proposer une formulation sans tension dans

laquelle la contrainte normale sur toutes les sections était toujours négative, ce qui se traduit par :

$$\forall (i, j) \in [1, 3], n_i \sigma_{ij} n_j \leq 0 \quad (7.67)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$  désigne le tenseur des contraintes, alors que  $\underline{n}$  désigne un vecteur unitaire normal à la section considérée.

Les hypothèses d'utilisation sont les suivantes :

- le nombre de grains dans le volume  $V$  considéré est suffisamment important pour rendre applicable l'hypothèse de milieu continu.
- si on veut en plus que les lois de comportement isotropes soient applicables, il faut aussi veiller à ce que la répartition de ces grains soit relativement homogène dans l'espace.
- pour appliquer les théories sur les petites perturbations, on peut supposer que les déformations sont des infiniment petits.
- le tenseur des contraintes d'un milieu granulaire est toujours défini négatif (c'est l'hypothèse "sans tension")

L'énergie ( $W$ ) d'une structure mécanique élastique va s'écrire :

$$W(\underline{\underline{\epsilon}}) = {}^t \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (7.68)$$

Avec :

1.  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur d'élasticité (du quatrième ordre).
2.  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est le tenseur des déformations (du deuxième ordre).

En utilisant la notation indicielle (ou d'Einstein), il vient :

$$W(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} C_{ijkl} \quad (7.69)$$

Pour un matériau isotrope, on peut exprimer cette énergie en fonction des coefficients de Lamé, ou bien en fonction de deux des trois invariants du tenseur des déformations :

$$W(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (7.70)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu (I_1^2 - 2I_2) \quad (7.71)$$

Avec :

1.  $\lambda$  et  $\mu$  sont les facteurs de Lamé.
2.  $I_1$  et  $I_2$  sont les deux premiers invariants du tenseur des déformations. Ces derniers sont définis par les relations suivantes :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (7.72)$$

$$I_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_3 + \epsilon_2 \epsilon_3 \quad (7.73)$$

La thermodynamique nous indique que le tenseur des contraintes est lié à l'énergie potentielle ainsi écrite par l'expression suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \quad (7.74)$$

Dans un milieu sans tension, l'énergie potentielle est stockée dès lors que la dilatation volumique ( $I_1$ ) est négative. On propose alors d'écrire l'énergie potentielle ( $\tilde{W}$ ) d'un milieu sans tension. Elle est donnée par :

$$W(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{2}\lambda(\epsilon_1^- + \epsilon_2^- + \epsilon_3^-)^2 + \mu((\epsilon_1^-)^2 + (\epsilon_2^-)^2 + (\epsilon_3^-)^2) \quad (7.75)$$

Le  $a^-$  signifie qu'on prend la partie négative de  $a$  définie par :

$$a^- = \frac{a - |a|}{2} \quad (7.76)$$

Si on suppose que les coefficients de Lamé sont des constantes, on sera en présence d'une relation élastique linéaire isotrope. En revanche, les non-linéarités apparaîtront dès que les coefficients de Lamé dépendront du tenseur des déformations.

5

Comme on souhaite calculer les contraintes, il faut dériver la fonction énergie potentielle. On remarquera au préalable que :

$$\frac{\partial a^-}{\partial a} = H(-a) \quad (7.78)$$

où  $H(x)$  est la distribution de Heaviside qui vaut un si  $x$  est positif, et 0 sinon.

## 7.5.2 Expression des dérivées de l'énergie potentielle

### Elasticité linéaire unilatérale

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = \lambda[tr(\underline{\underline{\epsilon}})]^- + 2\mu\epsilon_i^- \quad (7.79)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} = \lambda H(-tr(\underline{\underline{\epsilon}})) + 2\mu H(-\epsilon_i)\delta_{ij} \quad (7.80)$$

où  $\delta_{ij}$  est la distribution de Dirac qui vaut 1 si  $i = j$  et zéro sinon.

**Elasticité non linéaire unilatérale** Dans ce cas, les hypothèses émises par V.H.Nguyen[53] sont les suivantes :

- $\lambda$  est une fonction de  $tr(\underline{\underline{\epsilon}})$  :  $\lambda = \lambda(tr(\underline{\underline{\epsilon}}))$
- $\mu$  est définie par :  $\mu[\epsilon_i^-]^2 = \mu(\epsilon_i)[\epsilon_i^-]^2$ . On notera d'ailleurs  $\mu_i = \mu(\epsilon_i)$

V.H.Nguyen [53] a démontré que :

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = [\lambda + \frac{1}{2}\lambda' tr(\underline{\underline{\epsilon}})][tr(\underline{\underline{\epsilon}})]^- + 2[\mu_i + \frac{1}{2}\mu'_i \epsilon_i]\epsilon_i^- \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} &= [\lambda + 2\lambda' tr(\underline{\underline{\epsilon}}) + \frac{1}{2}\lambda'' [tr(\underline{\underline{\epsilon}})]^2] H(-tr(\underline{\underline{\epsilon}})) \\ &\quad + 2[\mu_i + 2\mu'_i \epsilon_i + \frac{1}{2}\mu''_i \epsilon_i^2] H(-\epsilon_i)\delta_{ij} \end{aligned} \quad (7.82)$$

5

**Remarque :** On peut montrer que la forme d'énergie proposée ci-dessus est isotrope à l'aide de la condition d'Ogden[58] :

$$\tilde{W}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \tilde{W}(\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{\epsilon}}\underline{\underline{Q}}^t) \quad (7.77)$$

où  $\underline{\underline{Q}}$  est une matrice orthogonale directe.

En utilisant les formules introduites ci-dessus, on associe à chaque état de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , l'expression explicite du tenseur de Cauchy des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de la loi de comportement sous forme matricielle.

La procédure de calcul est la suivante[55] :

1. Calculer  $I_1, I_2, I_3$  les invariants du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$ <sup>6</sup>
2. Trouver les déformations principales  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  en résolvant l'équation  $p(\epsilon) = 0$  :

$$p(\epsilon) = -\epsilon^3 + I_1\epsilon^2 - I_2\epsilon + I_3 = 0 \quad (7.86)$$

3. Calculer les dérivées de la fonction d'énergie de déformation pour  $i$  et  $j$  variant entre 1 et 3 :  $W_{,i}$  et  $W_{,ij}$
4. Comparer  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , et  $\epsilon_3$ . On calcule la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}})$  et le tenseur  $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}})$

(a) si  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^3 W_{,i} \underline{\underline{n}}_i \otimes \underline{\underline{n}}_i \quad (7.87)$$

$$\underline{\underline{C}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 W_{,ij} (\underline{\underline{n}}_i \otimes \underline{\underline{n}}_i) \otimes (\underline{\underline{n}}_j \otimes \underline{\underline{n}}_j) + \sum_{i=1}^3 W_{,i} \frac{\partial \underline{\underline{n}}_i \otimes \underline{\underline{n}}_i}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \quad (7.88)$$

(b) si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = W_{,1}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3) + W_{,3} \underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3 \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} = & (W_{,11} - W_{,12}) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + W_{,12} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + (W_{,33} - W_{,11} + 2W_{,12} - 2W_{,13})(\underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3) \otimes (\underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3) \\ & + (W_{,13} - W_{,12})(\underline{\underline{1}} \otimes (\underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3) + (\underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3) \otimes \underline{\underline{1}})[W_{,3} - W_{,1} \\ & - (W_{,11} - W_{,12})(\epsilon_3 - \epsilon_1) \frac{\partial \underline{\underline{n}}_3 \otimes \underline{\underline{n}}_3}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \end{aligned} \quad (7.90)$$

$$(7.91)$$

(c) si  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = W_{,1} \underline{\underline{1}} \quad (7.92)$$

$$\underline{\underline{C}} = (W_{,11} - W_{,12}) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + W_{,12} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad (7.93)$$

## 7.6 Cas discret non linéaire et/ou unilatéral pour un hexa-èdre à huit noeuds (BNL8)

### 7.6.1 Introduction

Nous allons utiliser dans cette section la même structure que celle qui a été étudiée à la fois dans le chapitre semi-analytique 3D et dans le paragraphe sur les éléments finis BL8. Nous emploierons des relations non-linéaires et/ou unilatérales au niveau des coefficients locaux d'interaction  $k$  et  $C$ .

La méthode de construction de cette famille va donc être la suivante :

---

<sup>6</sup>On rappelle que :

$$I_1 = tr(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (7.83)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ [tr(\underline{\underline{\epsilon}})]^2 - tr([\underline{\underline{\epsilon}}]^2) \} = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3 \quad (7.84)$$

$$I_3 = det(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \quad (7.85)$$

où :  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , et  $\epsilon_3$  sont les trois valeurs principales de  $\underline{\underline{\epsilon}}$

1. La construction de BNL8 repose sur la formulation énergétique de l'interaction entre les grains de ballast situés sur les sommets d'un réseau de forme cubique simple. La loi sera élastique, mais non-linéaire, au travers des coefficients locaux d'interaction.
2. Ensuite, on décrit les non-linéarités souhaitées, et notamment les effets unilatéraux.
3. Cela permettra enfin de calculer la contrainte en fonction de la déformation, ce qui permet d'en déduire la matrice de comportement.

## 7.6.2 Construction des lois de comportement discrètes

L'énergie discrète détaillée plus haut dépend des paramètres  $k_{ij}$  et  $C_{ij}$ . La non linéarité, et/ou le caractère unilatéral seront introduits au niveau de ces coefficients :

$$\begin{aligned}
 E_{tc} = & \frac{k_{1-2}}{8}(u_2 - u_1)^2 + \frac{k_{1-4}}{8}(v_4 - v_1)^2 + \frac{k_{1-5}}{8}(w_5 - w_1)^2 + \frac{k_{2-3}}{8}(v_2 - v_3)^2 \\
 & + \frac{k_{2-6}}{8}(w_6 - w_2)^2 + \frac{k_{3-4}}{8}(u_3 - u_4)^2 + \frac{k_{3-7}}{8}(w_7 - w_3)^2 + \frac{k_{4-8}}{8}(w_8 - w_4)^2 \\
 & + \frac{k_{5-6}}{8}(u_6 - u_5)^2 + \frac{k_{5-8}}{8}(v_8 - v_5)^2 + \frac{k_{6-7}}{8}(v_7 - v_6)^2 + \frac{k_{7-8}}{8}(u_7 - u_8)^2 \\
 & + \frac{C_{1-3}}{8}(u_1 - u_3 + v_1 - v_3)^2 + \frac{C_{1-6}}{8}(u_1 - u_6 + w_1 - w_6)^2 \\
 & + \frac{C_{1-8}}{8}(v_1 - v_8 + w_1 - w_8)^2 + \frac{C_{2-4}}{8}(u_2 - u_4 - v_2 + v_4)^2 \\
 & + \frac{C_{2-5}}{8}(u_2 - u_5 - w_2 + w_5)^2 + \frac{C_{2-7}}{8}(v_2 - v_7 + w_2 - w_7)^2 \\
 & + \frac{C_{3-6}}{8}(w_3 - w_6 - v_3 + v_6)^2 + \frac{C_{3-8}}{8}(u_3 - u_8 - w_3 + w_8)^2 \\
 & + \frac{C_{4-7}}{8}(u_4 - u_7 + w_4 - w_7)^2 + \frac{C_{4-5}}{8}(w_4 - w_5 - v_4 + v_5)^2 \\
 & + \frac{C_{5-7}}{8}(u_5 - u_7 + v_5 - v_7)^2 + \frac{C_{6-8}}{8}(u_6 - u_8 - v_6 + v_8)^2
 \end{aligned} \tag{7.94}$$

La forme homogénéisée de l'énergie volumique est la suivante :

$$\begin{aligned}
 E_{vtc} \times d = & \frac{k_{1-2}}{8}(\epsilon_{xx})^2 + \frac{k_{1-4}}{8}(\epsilon_{yy})^2 + \frac{k_{1-5}}{8}(\epsilon_{zz})^2 + \frac{k_{2-3}}{8}(\epsilon_{yy})^2 \\
 & + \frac{k_{2-6}}{8}(\epsilon_{zz})^2 + \frac{k_{3-4}}{8}(\epsilon_{xx})^2 + \frac{k_{3-7}}{8}(\epsilon_{zz})^2 + \frac{k_{4-8}}{8}(\epsilon_{zz})^2 \\
 & + \frac{k_{5-6}}{8}(\epsilon_{xx})^2 + \frac{k_{5-8}}{8}(\epsilon_{yy})^2 + \frac{k_{6-7}}{8}(\epsilon_{yy})^2 + \frac{k_{7-8}}{8}(\epsilon_{xx})^2 \\
 & + \frac{C_{1-3}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + 2\epsilon_{xy})^2 + \frac{C_{1-6}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} + 2\epsilon_{xz})^2 \\
 & + \frac{C_{1-8}}{8}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + 2\epsilon_{yz})^2 + \frac{C_{2-4}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} - 2\epsilon_{xy})^2 \\
 & + \frac{C_{2-5}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} - 2\epsilon_{xz})^2 + \frac{C_{2-7}}{8}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + 2\epsilon_{yz})^2 \\
 & + \frac{C_{3-6}}{8}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} - 2\epsilon_{yz})^2 + \frac{C_{3-8}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} - 2\epsilon_{xz})^2 \\
 & + \frac{C_{4-7}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} + 2\epsilon_{xz})^2 + \frac{C_{4-5}}{8}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} - 2\epsilon_{yz})^2 \\
 & + \frac{C_{5-7}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + 2\epsilon_{xy})^2 + \frac{C_{6-8}}{8}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} - 2\epsilon_{xy})^2
 \end{aligned} \tag{7.95}$$

où :  $d$  est le diamètre moyen du grain de ballast.

La loi de comportement est la relation qui lie  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . Pour l'obtenir, on dérive l'énergie volumique ci-dessus par rapport aux déformations :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial E_{vtc}}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \quad (7.96)$$

### 7.6.3 Introduction au niveau local d'une non-linéarité polynomiale de degré deux

L'hypothèse dans ce paragraphe est que la non linéarité de la rigidité locale est une fonction polynomiale de la variable qui suit dans l'expression de l'énergie. Ainsi, si l'expression de l'énergie volumique est :  $E_v = \frac{1}{2 \times d} k(\epsilon)^2$ , alors la rigidité  $k$  est une fonction de  $(\epsilon)$ , la déformation. Le développement pour  $k(\epsilon)$  à l'ordre 2 par rapport à  $\epsilon$  :

$$k(\epsilon) = a + b\epsilon + c\frac{\epsilon^2}{2} \quad (7.97)$$

**Remarque :** si le milieu est linéaire, alors les coefficients  $b$  et  $c$  seront nuls.

Dans ce cas, l'énergie volumique s'exprime de la manière suivante :

$$E_v = \frac{1}{2 \times d} k(\epsilon) [\epsilon]^2 \quad (7.98)$$

$$= \frac{1}{2 \times d} (a + b\epsilon + c\frac{\epsilon^2}{2}) [\epsilon]^2 \quad (7.99)$$

Pour déterminer la loi de comportement locale, on calcule l'expression de la contrainte :

$$\sigma = \frac{\partial E_v}{\partial \epsilon} \quad (7.100)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \frac{1}{2 \times d} (a + b\epsilon + c\frac{\epsilon^2}{2}) [\epsilon]^2 \right) \quad (7.101)$$

$$= [a + \frac{3b}{2}\epsilon + c\epsilon^2] \frac{1}{d} \epsilon \quad (7.102)$$

L'égalité (7.102) permet de déterminer directement l'expression du coefficient non-linéaire caractéristique du comportement  $f(\epsilon)$  :

$$\sigma = f(\epsilon)\epsilon \quad (7.103)$$

$$f(\epsilon) = \frac{1}{d} (a + \frac{3b}{2}\epsilon + c\epsilon^2) \quad (7.104)$$

**Remarque :** La valeur du coefficient  $a$  est imposée par le cas linéaire, c'est à dire le cas où  $b = c = 0$ . Dans ce cas, il vient<sup>7</sup> :

$$a = \lambda d \quad (7.105)$$

$$\lambda = \mu \quad (7.106)$$

---

<sup>7</sup>La valeur de  $a$  est très facile à trouver en utilisant l'énergie volumique écrite plus haut, de même qu'en supposant que tous les coefficients sont identiques comme dans le cas du BL8.

avec :  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $d$  le diamètre moyen du grain de ballast.

On notera, par la suite,  $f_{i-j}$  à la place de la notation complète qui dépend de la forme de la déformation qui la suit et de la numérotation des noeuds de l'interaction  $i$  et  $j$ .

Avec la démarche précédente d'utilisation d'une forme volumique homogénéisée et d'emploi des notions de contraintes et de déformations (grandeurs typiquement continues), la relation contrainte-déformation élastique non-linéaire s'écrit<sup>8</sup> :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\epsilon}}$$

où :  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le vecteur des contraintes de Cauchy,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  le vecteur des déformations, et  $\underline{\underline{P}}$  la matrice de comportement élastique non-linéaire. On a (notation de Voigt) :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix}, \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

La matrice de comportement se met sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{8 \times d} \begin{bmatrix} A_1 & A_4 & A_6 & A_7 & 0 & A_5 \\ & A_2 & A_8 & 0 & A_9 & A_5 \\ & & A_3 & A_7 & A_9 & 0 \\ & & & A_6 & 0 & 0 \\ & & & & A_8 & 0 \\ & & & & & A_4 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A_1 = f_{1-2} + f_{3-4} + f_{5-6} + f_{7-8} + f_{1-3} + f_{1-6} + f_{2-4} + f_{2-5} + f_{3-8} + f_{4-7} + f_{5-7} + f_{6-8} \quad (7.107)$$

$$A_2 = f_{1-4} + f_{2-3} + f_{5-8} + f_{6-7} + f_{1-3} + f_{1-8} + f_{2-4} + f_{2-7} + f_{3-6} + f_{4-5} + f_{5-7} + f_{6-8} \quad (7.108)$$

$$A_3 = f_{1-5} + f_{2-6} + f_{3-7} + f_{4-8} + f_{1-6} + f_{1-8} + f_{2-5} \quad (7.109)$$

$$+ f_{2-7} + f_{3-6} + f_{3-8} + f_{4-7} + f_{4-5} \quad (7.110)$$

$$A_4 = f_{1-3} + f_{2-4} + f_{5-7} + f_{6-8} \quad (7.111)$$

$$A_5 = f_{1-3} - f_{2-4} + f_{5-7} - f_{6-8} \quad (7.112)$$

$$A_6 = f_{1-6} + f_{2-5} + f_{3-8} + f_{4-7} \quad (7.113)$$

$$A_7 = f_{1-6} - f_{2-5} + f_{3-8} - f_{4-7} \quad (7.114)$$

$$A_8 = f_{1-8} + f_{2-7} + f_{3-6} + f_{4-5} \quad (7.115)$$

$$A_9 = f_{1-8} + f_{2-7} - f_{3-6} - f_{4-5} \quad (7.116)$$

Tout cela permet de construire les non-linéarités d'ordre deux par rapport à la déformation. Il reste à introduire des effets sans tension à l'intérieur de cette matrice de comportement. Ces effets sans tension seront, comme pour les non-linéarités, introduits grâce aux coefficients locaux d'interaction des grains  $k_{i-j}$  et  $C_{i-j}$ .

<sup>8</sup>On utilise pour cela la notation de Voigt.

### 7.6.4 Effets sans-tension : critères et utilisation

Une autre forme de non-linéarité est introduite au niveau des coefficients locaux d'interaction : il s'agit de l'unilatéralité éventuellement sans tension. Cela signifie que si deux grains adjacents se touchent, une interaction entre les deux grains aura lieu ; s'ils ne touchent pas l'interaction sera nulle.

L'unilatéralité éventuellement sans tension est choisie pour traduire le caractère granulaire du ballast.

Dans le réseau constitué par les éléments finis, le critère pour indiquer si les deux grains se touchent est déterminé par le "diamètre moyen des grains de ballast",  $d$ . Si la distance entre les deux noeuds adjacents est inférieure à  $d$ , les grains se toucheront et seulement dans ce cas : l'interaction se produira à ce moment là.

Cette unilatéralité éventuellement sans tension se combine assez facilement avec des lois de comportement linéaires ou non-linéaires.

Soient  $i$  et  $j$  deux grains adjacents, et  $m$  une des trois directions de l'espace. On peut décrire les effets sans tension de la manière suivante :

#### 1. Coefficients longitudinaux :

Si  $\forall i, \forall j$  adjacent à  $i, \forall m \in \{x, y, z\}$  :

$$|x_i^m - x_j^m| < d, \text{ alors : } k_{i-j}^m = f(x_i^m, x_j^m) \neq 0 \quad (7.117)$$

Si en revanche  $\forall i, \forall j$  adjacent à  $i, \exists m \in \{x, y, z\}$  :

$$|x_i^m - x_j^m| > d, \text{ alors : } k_{i-j}^m = 0 \quad (7.118)$$

Avec :

- $x_i^m$  représente la  $m$ -ième coordonnée ( par exemple si  $m=x$ , ce sera son abscisse ) du  $i$ -ème noeud.
- $d$  désigne le diamètre moyen d'un grain de ballast.
- $k_{i-j}^m$  est le coefficient de rigidité inter-grain longitudinal entre les grains  $i$  et  $j$  dans la direction  $m$ .
- $f(x_i^m, x_j^m)$  est la loi de contact entre les grains  $i$  et  $j$  selon la  $m$ -ième direction. Dans un premier temps, on pourra par exemple considérer qu'il s'agit d'une constante ( $\mu d$  comme dans le cas linéaire par exemple).

#### 2. Coefficients croisés :

Si :  $\forall i, \forall j$  sur la même face que  $i$  et sur la diagonale du cube, (7.119)

$$\forall (m, n) \in \{x, y, z\}, m \neq n :$$

$$|x_i^m - x_j^m|^2 + |x_i^n - x_j^n|^2 < 2d^2, \text{ alors : } C_{i-j}^{m,n} = g(x_i^m, x_j^m) \neq 0 \quad (7.120)$$

Si :  $\forall i, \forall j$  sur la même face que  $i$  et sur la diagonale du cube, (7.121)

$$\exists (m, n) \in \{x, y, z\}, m \neq n :$$

$$|x_i^m - x_j^m|^2 + |x_i^n - x_j^n|^2 > 2d^2, \text{ alors : } C_{i-j}^{m,n} = 0 \quad (7.122)$$

avec :  $C_{i-j}^{m,n}$  est le coefficient de rigidité inter-grain croisé entre les grains  $i$  et  $j$  selon les directions  $m$  et  $n$ .

## 7.7 Amortissement numérique

L'amortissement a été souvent étudié, de nombreuses approches permettent de l'appréhender. L'objectif de cette section est de décrire les deux amortissements numériques utilisés dans le cadre du code éléments finis "CESAR-LCPC".

### 7.7.1 Couche absorbante dans CESAR[54]

Dans une approche par éléments finis, il est difficile de simuler la propagation des ondes dans un milieu infini. En effet, sur les bords du maillage se créent des ondes réfléchies parasites (qui n'existent pas physiquement). Pour traiter ce problème, on décide d'utiliser des couches absorbantes sur les bords de notre maillage, afin d'absorber les ondes qui sortiraient du maillage.

Les deux conditions pour ces couches absorbantes sont les suivantes :

- ils sont assez visqueux pour limiter l'influence des frontières et éviter les ondes réfléchies parasites
- ils sont suffisamment progressifs pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie à cause des changements brusques d'amortissement.

V.H.Nguyen[54] a introduit un amortissement du deuxième ordre pour satisfaire ces deux critères :

$$\eta(x) = \eta_0 \left( \frac{x}{d} \right)^2 \quad (7.123)$$

V.H.Nguyen[54], qui a écrit le programme "ABS" permettant de tenir compte de ces éléments, pense que ce modèle à l'origine purement numérique n'est pas connecté physiquement à la réalité.

Or, ne peut-on pas penser à la dispersion énergétique selon une sphère en  $d^2$  ? Dans la pratique, lorsque  $d \rightarrow +\infty$ ,  $\eta(x) \rightarrow 0$  : ce n'est pas choquant, puisque justement on a introduit cet amortissement pour simuler le fait que le milieu était infini. Réciproquement, lorsque  $d \rightarrow 0$ ,  $\eta(x) \rightarrow +\infty$ .

En somme, plus le milieu est vaste, plus l'énergie a déjà été dispersée sur toute la surface : par conséquent, l'amortissement nécessaire est réduit, ce qu'indique bien la formule.

### 7.7.2 Formule d'amortissement proportionnel utilisée dans le code élément finis CESAR

Dans le code CESAR-LCPC, l'amortissement utilisé est un amortissement proportionnel de type Rayleigh. Il a la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}} = A \underline{\underline{K}} + B \underline{\underline{M}} \quad (7.124)$$

avec :  $\underline{\underline{K}}$  est la matrice de rigidité,  $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de masse.

Usuellement, les valeurs de A et B sont les suivantes :

$$A = \frac{2(\omega_1 \alpha_1 - \omega_2 \alpha_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (7.125)$$

$$B = \frac{2\omega_1 \omega_2 (\omega_1 \alpha_2 - \omega_2 \alpha_1)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (7.126)$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les pourcentages d'amortissement critique associés à deux modes propres de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### Démonstration des formules précédentes :

La forme générale d'un système dynamique libre est la suivante :

$$\underline{\underline{M}}\ddot{U}(t) + \underline{\underline{C}}\dot{U}(t) + \underline{\underline{K}}U(t) = 0 \quad (7.127)$$

où :

- $\underline{\underline{M}}$  = matrice de masse
- $\underline{\underline{C}}$  = matrice d'amortissement
- $\underline{\underline{K}}$  = matrice de rigidité

On note :

- $\omega_i$  = fréquence angulaire des modes propres non amortis
- $\Phi_i$  = vecteur propre correspondant au mode i

Par hypothèse, la matrice d'amortissement  $\underline{\underline{C}}$  est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité de la forme suivante :

$$\underline{\underline{C}} = A\underline{\underline{K}} + B\underline{\underline{M}} \quad (7.128)$$

En projetant (7.127) sur la base des i vecteurs propres, il vient :

$$m_i\ddot{u}_i(t) + c_i\dot{u}_i(t) + k_i u_i(t) = 0 \quad (7.129)$$

avec :

- $m_i = {}^t \Phi_i \underline{\underline{M}} \Phi_i$
- $k_i = {}^t \Phi_i \underline{\underline{K}} \Phi_i = m_i \omega_i^2$  (par définition des modes propres)
- $c_i = {}^t \Phi_i \underline{\underline{C}} \Phi_i$

Pour simplifier les notations suivantes, on remplace  $c_i$  par  $2m_i\alpha_i\omega_i$ . Ecrivons donc ce coefficient  $c_i$  de deux manières différentes :

$$c_i = 2m_i\alpha_i\omega_i = {}^t \Phi_i \underline{\underline{C}} \Phi_i \quad (7.130)$$

$$= B^t \Phi_i \underline{\underline{M}} \Phi_i + A^t \Phi_i \underline{\underline{K}} \Phi_i \quad (7.131)$$

$$= Bm_i + A\omega_i^2 m_i \quad (7.132)$$

On a donc une relation simple entre les coefficients de Rayleigh et les autres variables connues du problème :

$$A\omega_i^2 + B = 2\alpha_i\omega_i \quad (7.133)$$

Il suffit d'utiliser cette relation pour deux modes, par exemple les deux premiers. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues (les deux paramètres de Rayleigh) :

$$A\omega_1^2 + B = 2\alpha_1\omega_1 \quad (7.134)$$

$$A\omega_2^2 + B = 2\alpha_2\omega_2 \quad (7.135)$$

d'où, après résolution, les expressions proposées pour les coefficients de Rayleigh.

## 7.8 Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté l'utilisation des éléments finis telle qu'elle a été faite dans cette thèse. Les éléments classiques hexaédriques pour des lois de comportement continues ont permis d'introduire les notions et les notations. L'algorithme retenu a été celui de Newton-Raphson. Les calculs du résidu, de l'assemblage des matrices de rigidité, de masse et éventuellement d'amortissement sont effectués numériquement à l'aide du code de calcul CESAR-LCPC.

Plusieurs lois de comportement ont été imaginées : des lois continues ou discrètes linéaires, non-linéaires, et unilatérales. On s'est appuyé en partie sur le travail de V.H.Nguyen et al. [53] pour les approches continues non-linéaires et/ou unilatérales.

Les cas de validation, et les applications seront traités dans le chapitre suivant.

# Chapitre 8

## Eléments de validation et de comparaison de modèles numériques

Dans le chapitre précédent, on a construit et référencé des modèles utilisables pour la modélisation de la structure des voies ferrées. Ces modèles sont les suivants : linéaire continu [LC], linéaire discret [BL8], linéaire continu unilatéral [VLU], linéaire discret unilatéral [BLU], non-linéaire continu [VNL], non-linéaire continu unilatéral [VNLU], non-linéaire discret unilatéral [BNL8].

L'objectif de ce chapitre est de donner des éléments de validation sur les modèles de comportement développés dans le chapitre précédent. Ces éléments de validation utiliseront notamment la solution analytique de Boussinesq (cas statique). Les modèles seront comparés au modèle linéaire élastique continu sur des sollicitations dynamiques de faible fréquence. Mais la validation viendra du chapitre suivant par comparaison avec les essais du banc BESTT<sup>1</sup>.

### 8.1 Comparaison des différents modèles avec la solution analytique de Boussinesq

#### 8.1.1 Rappels sur le problème et la solution de Boussinesq pour une charge fixe ponctuelle

La solution de Boussinesq donne les expressions explicites de la réponse d'un demi-espace soumis à une force statique verticale  $F$  à la surface libre (fig.8.1).

Soient  $G$  le module de cisaillement élastique,  $\rho$  la distance entre le point d'application de la force et le point d'observation, et  $r$  la distance entre le point d'application et la projection orthogonale du point d'observation sur la surface libre.

Les expressions sur les déplacements sont les suivantes :

$$u_x = \frac{F}{4\pi G} \left[ \frac{xz}{\rho^3} - (1 - 2\nu) \frac{x}{\rho(\rho + z)} \right] \quad (8.1)$$

$$u_y = \frac{F}{4\pi G} \left[ \frac{yz}{\rho^3} - (1 - 2\nu) \frac{y}{\rho(\rho + z)} \right] \quad (8.2)$$

---

<sup>1</sup>Banc d'Essai Sur Trois Traverses

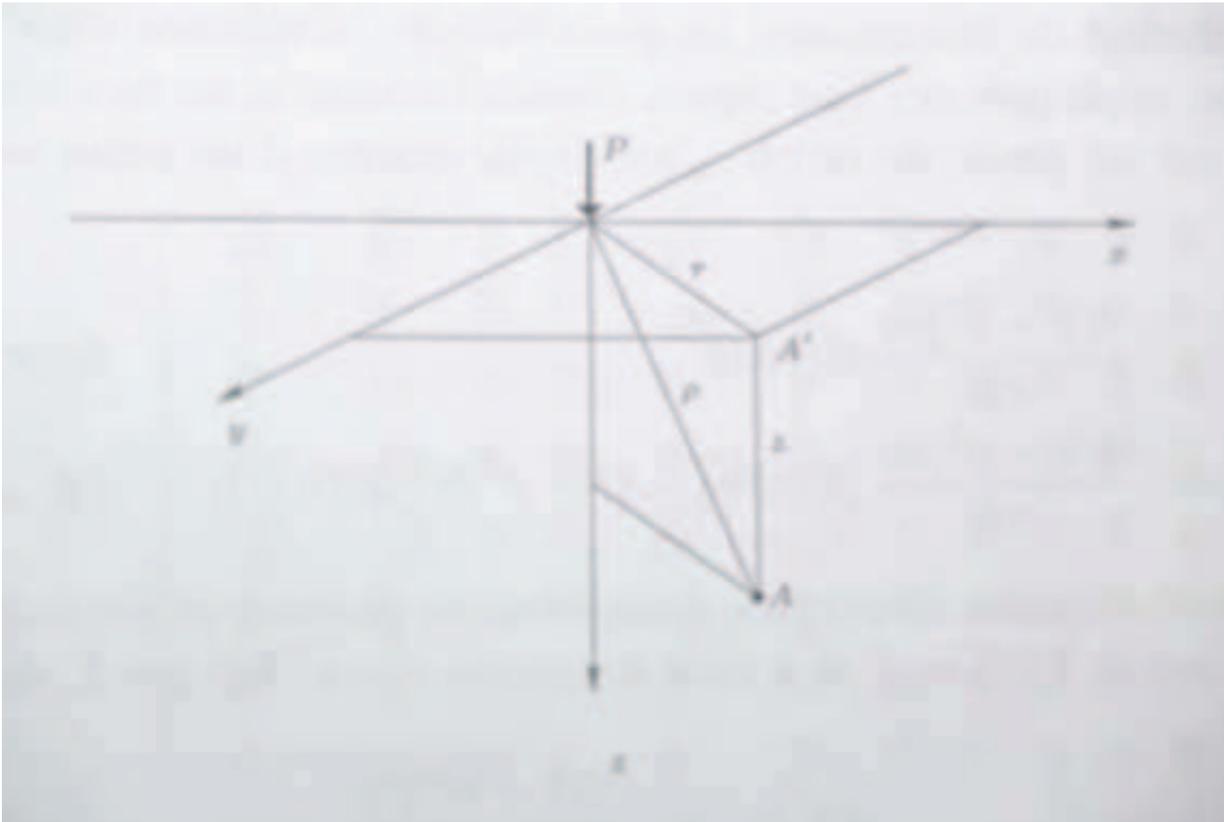


FIG. 8.1 – Schéma de la sollicitation de Boussinesq pour trouver une solution analytique

$$u_z = \frac{F}{4\pi G} \left[ \frac{z^2}{\rho^3} - \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right] \quad (8.3)$$

### 8.1.2 Présentation du maillage pour les modèles numériques, effet de la taille du maillage

Lorsqu'on utilise les éléments finis, la géométrie du maillage est nécessairement bornée ce qui n'est pas le cas de la solution analytique de Boussinesq. En effet, c'est une méthode de discrétisation et d'interpolation en fonction d'un nombre de noeuds. On va alors tester différents maillages pour savoir quel est le nombre minimal de mailles pour superposer la solution de Boussinesq et une modélisation linéaire élastique continue.

Grâce à la symétrie de révolution, nous ne considérons qu'un quart du maillage. Il nous faut d'abord déterminer combien de mailles sont nécessaires pour représenter de manière correcte les déplacements de Boussinesq dans les trois directions de l'espace.

Plusieurs maillages sont testés : 5\*5\*6 (fig.8.3 et 8.4), 8\*8\*9 (fig.8.5 et 8.6), 15\*15\*18 (fig.8.7 et 8.8 ), 22\*22\*27 (fig.8.9 et 8.10 ) où les numéros indiquent le nombre de noeuds dans les directions x, y, et z.

Les comparaisons (fig.8.2) entre les différents maillages montrent que les maillages 5\*5\*6 et 8\*8\*9 ont un nombre de mailles insuffisant pour simuler un milieu continu : il y a en effet un écart supérieur à 60% entre la solution (en déplacement) de Boussinesq et les résultats de

la simulation en éléments finis<sup>2</sup>.

Les écarts sont de 33% avec le maillage 15\*15\*18, mais de moins de 3% avec le maillage 22\*22\*27. Par conséquent, par la suite, on utilisera ce maillage 22\*22\*27.

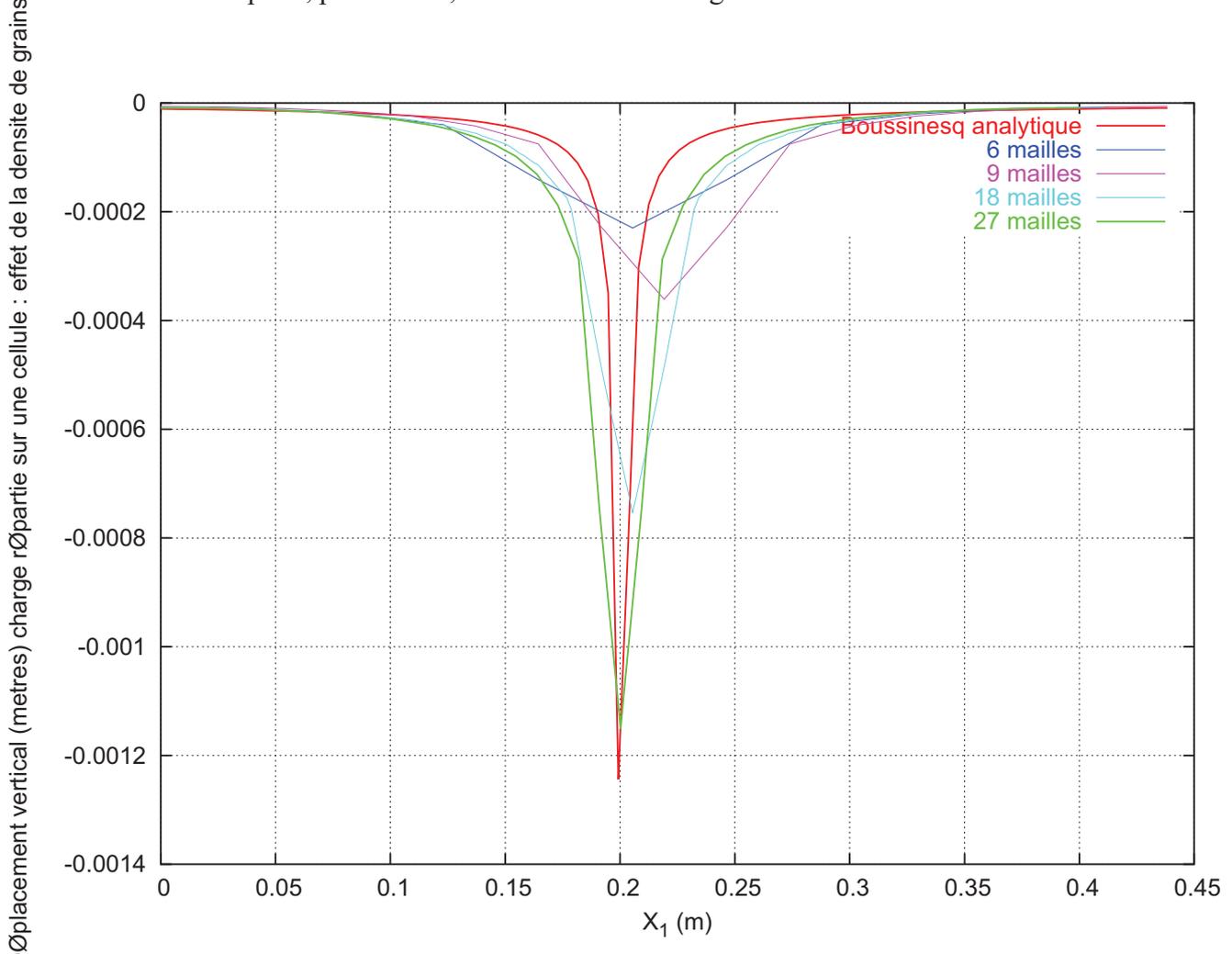


FIG. 8.2 – Comparaison des résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire en fonction de la densité de grains

### 8.1.3 Comparaisons entre la solution de Boussinesq et les modèles introduits dans CESAR-LCPC

On applique une charge de  $1N$  sur un petit élément de surface (charge quasi-ponctuelle sur la surface d'une maille). Les déplacements à  $4cm$  de profondeur au droit du chargement sont évalués. Comme les développements dans CESAR-LCPC ont été effectués dans un module "dynamique"<sup>3</sup>, il n'était pas possible de modéliser en l'état le cas de Boussinesq. On a donc utilisé un cas très lentement variable : un signal sinusoïdal de fréquence  $0.001Hz$ . Utiliser un signal dynamique implique de se préoccuper des ondes de retour par réflexion sur les parois.

<sup>2</sup>On utilise pour cela le module statique linéaire du code de calcul CESAR-LCPC (LINE). L'objet de cette simulation est de savoir à partir de quel nombre de grains (quelle densité de grains) il n'y a plus de différence entre la solution analytique de Boussinesq et une simulation par éléments finis

<sup>3</sup>DYNI et DYNL pour dynamique linéaire ou non-linéaire

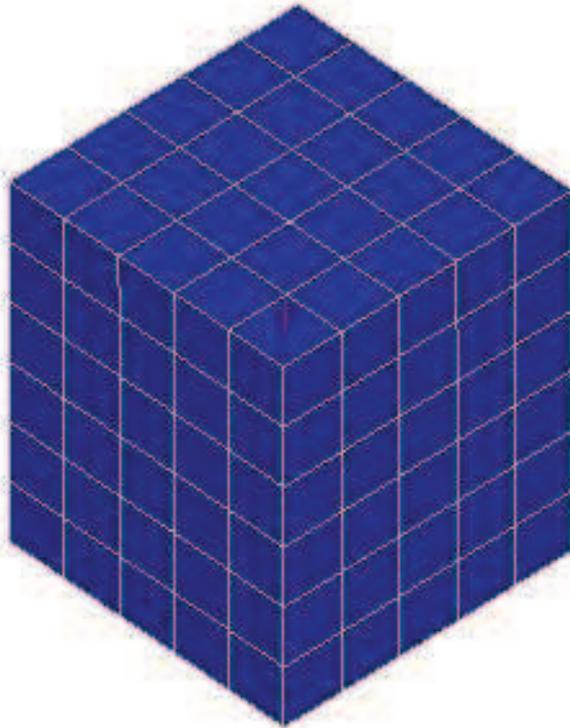


FIG. 8.3 – Schéma du maillage 5\*5\*6 en utilisant des éléments MTH8 [Eléments hexaédriques à huit noeuds avec une interpolation linéaire]

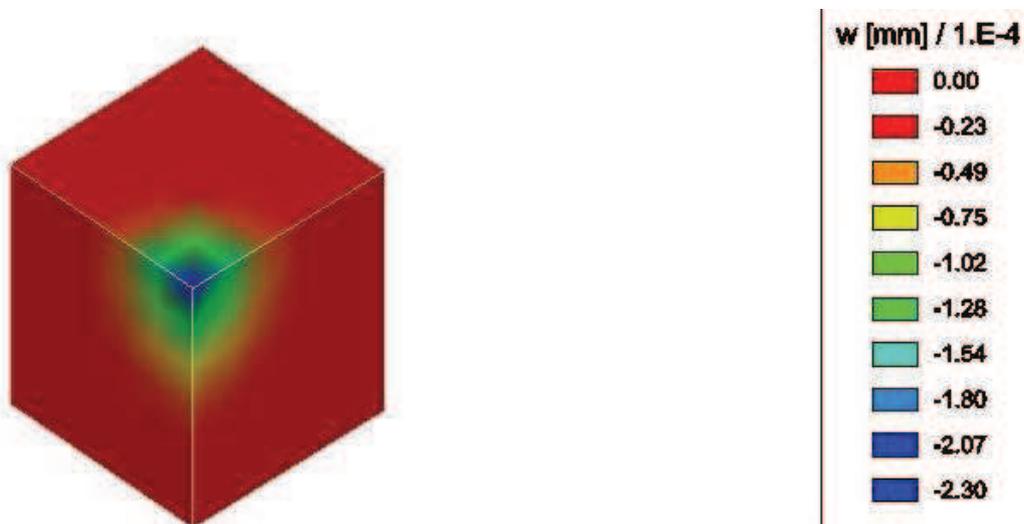


FIG. 8.4 – Résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire du maillage 5\*5\*6

Pour représenter un milieu semi-infini, il faut : soit utiliser un très grand maillage avec un peu de dissipation numérique ; soit utiliser un maillage beaucoup moins coûteux en degrés de liberté, mais dans ce cas, il faut utiliser des amortisseurs sur les bords du maillage.

C'est cette dernière méthode qui sera utilisée. Le milieu pourra être considéré comme semi-

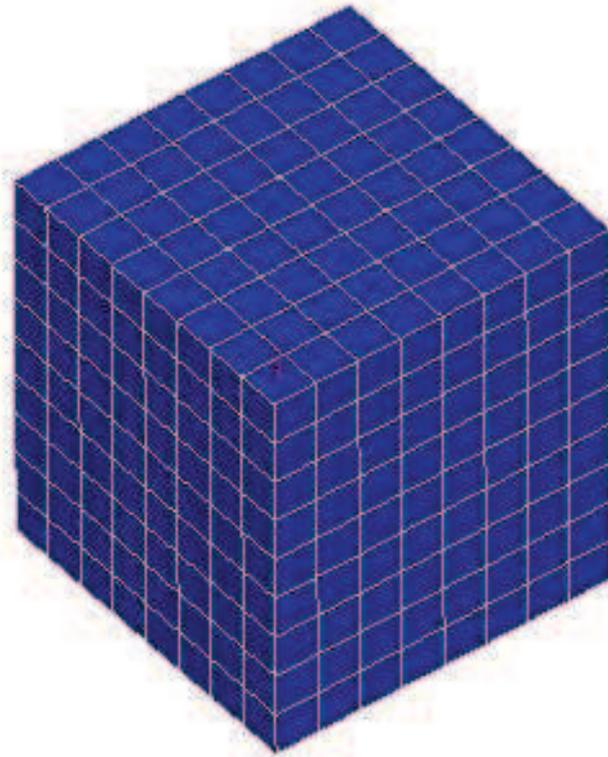


FIG. 8.5 – Schéma du maillage 8\*8\*9

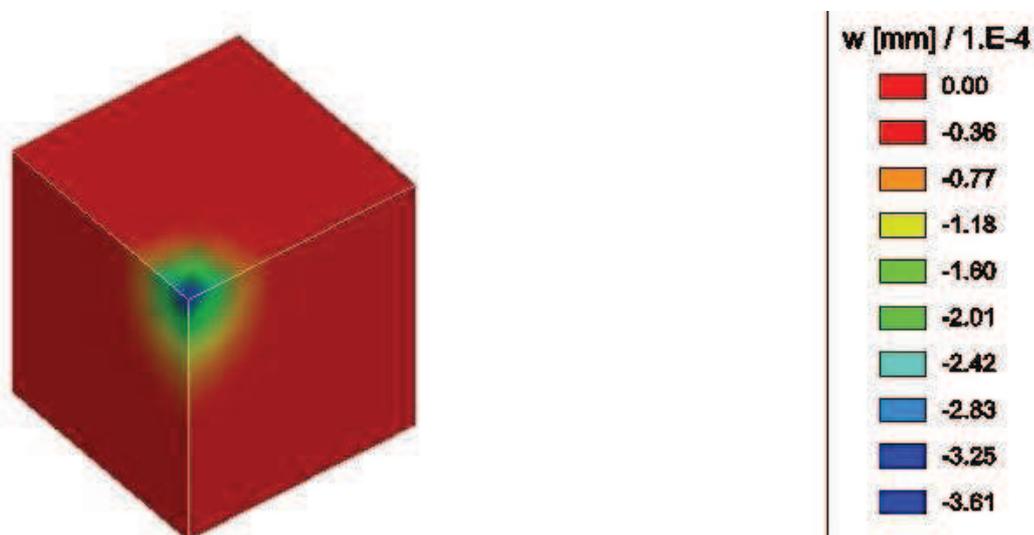


FIG. 8.6 – Résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire du maillage 8\*8\*9

infini dès lors que les ondes produites à cause de la force en surface iront “à l’infini”, c’est à dire qu’elle ne seront pas réfléchies sur les bords. Les éléments d’amortisseurs seront placés sur les bords pour conduire à la dissipation escomptée. Il faut toutefois que cet amortissement soit progressif, afin d’éviter les réflexions dues au contraste des amortissements.

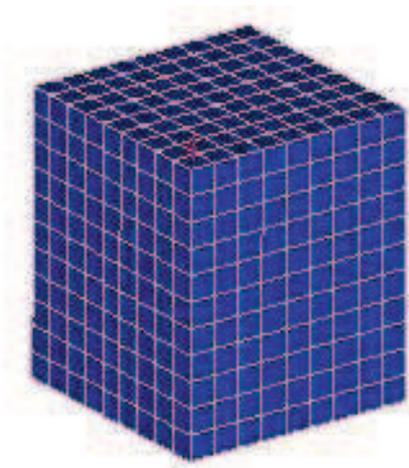


FIG. 8.7 – Schéma du maillage 15\*15\*18

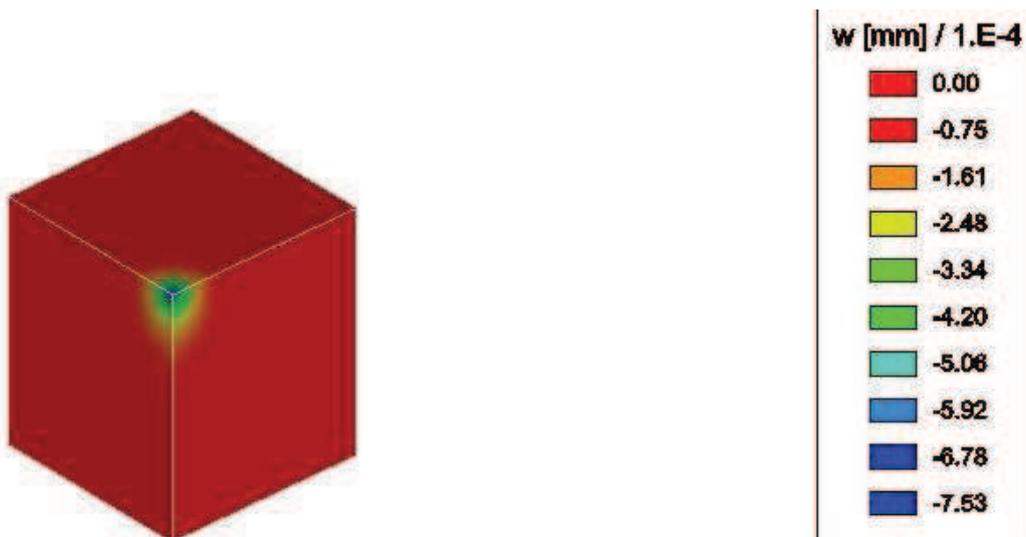


FIG. 8.8 – Résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire du maillage 15\*15\*18

Le tableau (Tab. 8.1) présente les déplacements maximaux pour le maillage 22\*22\*27, qui permettait d'ajuster le déplacement de la solution linéaire continue sur la solution analytique de Boussinesq. On constate que les déplacements ont les mêmes ordres de grandeur si le module d'Young et le coefficient de Poisson sont fixés pour l'ensemble des modèles. De plus, les modèles unilatéraux donnent pratiquement les mêmes résultats. Cela est rassurant puisque la plupart des lois ont été calées sur des faibles fréquences de sollicitation.

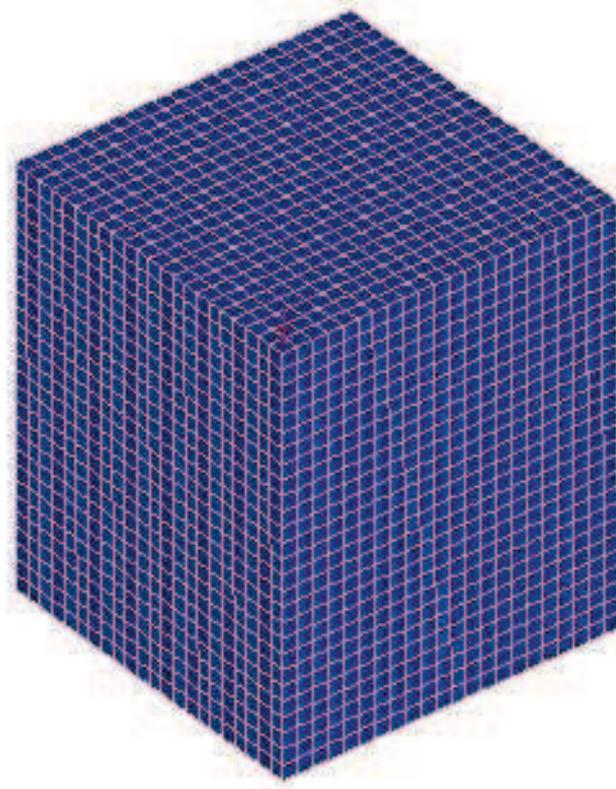


FIG. 8.9 – Schéma du maillage 22\*22\*27

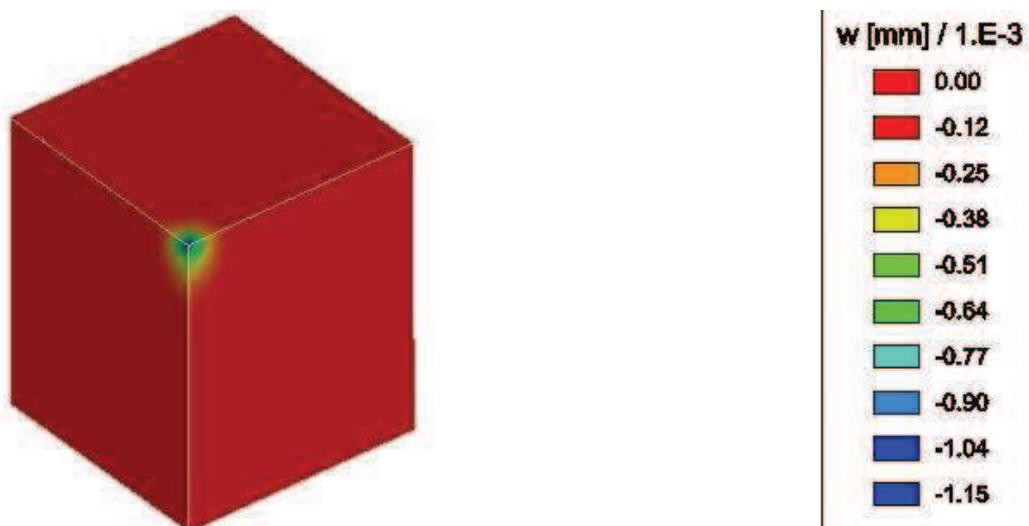


FIG. 8.10 – Résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire du maillage 22\*22\*27

## 8.2 Comparaison des différents modèles entre eux sur une expérience pseudo-oedométrique

### 8.2.1 Présentation du maillage pour les modèles numériques

On utilise le maillage 22\*22\*27 ( fig. 8.11) qui permettait d'approcher au mieux le comportement d'un espace semi-infini sur des cas très lentement variables ou statiques. Les parois

TAB. 8.1 – Tableau des déplacements maximaux de Boussinesq pour les différents modèles développés, pour une charge de  $1N$ , à  $4\text{cm}$  de la surface, au droit de la charge pour un module d'Young de  $200\text{MPa}$ , et un coefficient de Poisson de  $0.25$

Modèle	Déplacements maximaux ( $10^{-3}\text{mm}$ )
Boussinesq	1.2
LC	1.15
BL8	1.15
BLU	1.21
BNL8	1.25
VLU	1.24
VNL	1.3
VNLU	1.22

latérales autorisent uniquement des glissements le long de ces parois. Le chargement s'applique à l'ensemble de la surface de l'éprouvette étudiée. Avec un chargement vers le bas en permanence, cela permet de penser que l'éprouvette se trouvera en compression.

Comme dans la section précédente, on se trouve dans un cas où la dynamique du maillage impose que l'on utilise des éléments d'amortissement : ce peuvent être <sup>4</sup> soit un amortissement global de type Rayleigh <sup>5</sup>, soit des éléments d'amortisseur qu'on répartit sur les bords (le fond seul ici). Le but demeure le même : pouvoir amortir (ou dissiper) suffisamment les ondes incidentes pour qu'il n'y ait pas de réflexion (ou le moins possible) sur le fond, ce qui provoquerait des problèmes numériques.

Dans cette section, on va comparer l'ensemble de nos modèles pour savoir si des différences existent sur le déplacement (sinon, autant prendre le modèle le plus simple et/ou le plus rapide !) pour des fréquences de sollicitation faible ( $1\text{Hz}$ ) ou élevée ( $64\text{Hz}$ ) avec une force d'intensité  $1N$ .

## 8.2.2 Comparaisons des modèles

On compare les différents modèles sur le déplacement vertical pour une rigidité de  $200\text{MPa}$  et un coefficient de Poisson de  $0.25$ . Sauf dans le cas BNL8, les résultats sont relativement proches pour les déplacements verticaux entre les différents modèles. Dans le chapitre suivant, on verra comment, sur un cas réel, on parvient à déterminer le meilleur modèle de comportement pour le ballast.

Lorsqu'on compare les accélérations en fonction de la rigidité du sol sur le modèle [LC] à deux fréquences  $10$  et  $64\text{Hz}$  (signal sinusoïdal), on obtient le tableau (8.2). L'intensité de la sollicitation est de  $170\text{kN}$  (=17tonnes sous l'influence de la gravité)<sup>6</sup>. Sauf pour des rigidités voisines de celles d'un béton, pour  $64\text{Hz}$  ( $400\text{km/h}$ )<sup>7</sup>, l'accélération dans le ballast est supérieure à la valeur de la gravité : cela explique sans doute les très forts tassements constatés sur les voies réelles pour les grandes vitesses.

Pour  $10\text{Hz}$ , les accélérations maximales diminuent avec l'augmentation des rigidités. Pour

<sup>4</sup>dans CESAR-LCPC

<sup>5</sup>combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse : voir le chapitre 7

<sup>6</sup>il s'agit de la masse sur un des deux essieux d'un bogie

<sup>7</sup>ceci sera expliqué dans le chapitre suivant

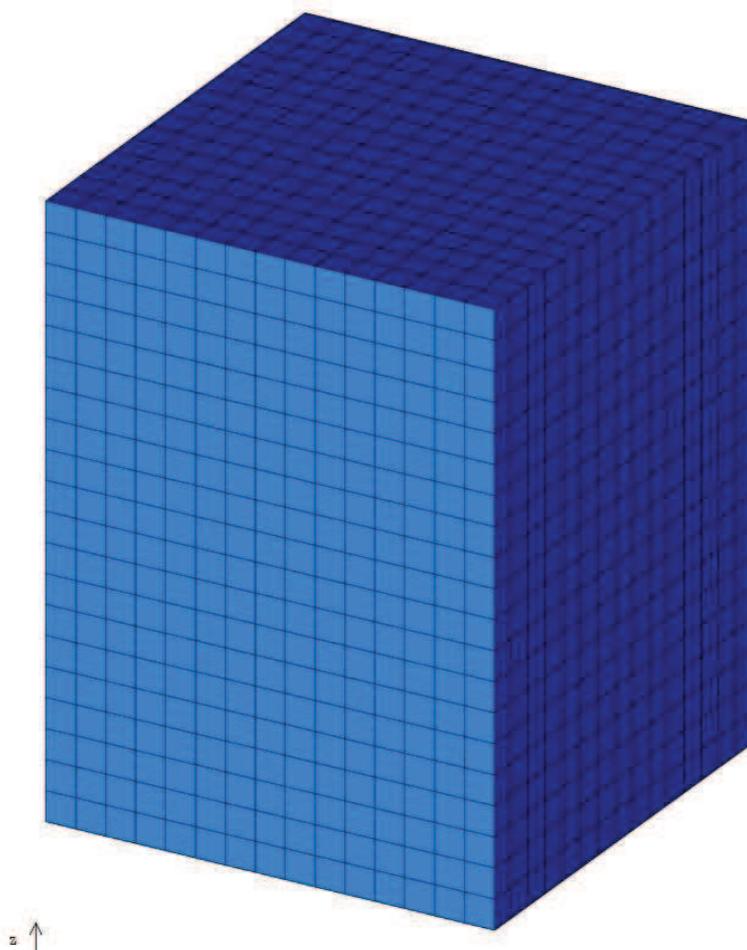


FIG. 8.11 – Résultats sur le déplacement vertical pour une charge répartie sur une cellule élémentaire du maillage 22\*22\*27

TAB. 8.2 – Comparaison des déplacements maximaux ( $\delta_m$ ) obtenus pour les différents modèles développés dans le chapitre 7 pour deux sollicitations (1Hz et 64Hz)

Modèle	$\delta_m$ ( $10^{-3}mm$ ) à 1Hz	$\delta_m$ ( $10^{-3}mm$ ) à 64Hz
LC	1.3	2.7
BL8	1.3	2.8
BLU	1.4	2.9
BNL8	1.6	3.9
VLU	1.5	2.9
VNL	1.6	3.1
VNLU	1.4	2.9

64Hz, on observe une petite augmentation jusque vers 50MPa (cas le plus défavorable pour la stabilité des grains), puis une diminution avec l'accroissement de la rigidité. En outre, (et fort logiquement), l'accélération dans le maillage est plus élevée pour 64Hz que pour 10Hz.

TAB. 8.3 – Comparaison des accélérations maximales ( $A_m$ ) pour évaluer la relation entre les fréquences de sollicitation (10Hz et 64Hz) et la rigidité du sol

Rigidité du sol (en MPa)	$A_m (m.s^{-2})$ à 10Hz	$A_m (m.s^{-2})$ à 64Hz
10	7.05	15.02
35	3.32	17.98
50	2.69	26.09
100	1.80	21.81
200	1.12	13.39
25000	0.37	7.63

### 8.3 Conclusions

Ce chapitre avait pour unique ambition de donner quelques éléments de comparaison entre les solutions connues et les modèles construits au chapitre 7. Les quelques observations obtenues seront utilisées pour le chapitre suivant concernant la modélisation de la voie ferrée.

D’abord, la taille du paramètre de maille est importante dans les résultats, ou plutôt la densité en noeuds sur un même espace est un paramètre important. On retrouvera ce résultat dans le chapitre suivant.

De plus, on a montré sur les cas de Boussinesq (statique) que les modèles étaient bien calés sur les cas de très faibles fréquences. C’est peu étonnant car les différentes lois ont été calées sur les faibles fréquences de sollicitation.

Dans un cas pseudo-oedométrique, on remarque que les différences à 1Hz sont faibles alors que les écarts demeurent beaucoup plus importants à 64Hz sur les déplacements.

La nature du sol a également un impact : à 10Hz, les accélérations augmentent avec une baisse de rigidité ; à 64Hz, les accélérations passent par un maximum pour la rigidité de 50MPa.

Cette phase de “validation” ne peut se satisfaire de comparaisons entre modèles ou de comparaisons avec des solutions analytiques connues. C’est pourquoi, on comparera le résultat des modèles à des résultats expérimentaux. Cela permettra de déterminer quel(s) modèle(s) il convient de conserver ou d’écarter sur les observables déplacement et accélération, observables que A.Al Shaer ([4]) a relié au tassement, objectif véritable de nos études.

# Chapitre 9

## Application ferroviaire : cas du banc d'essai à échelle un tiers

### 9.1 Introduction

Dans ce chapitre ultime de ce travail de thèse, on a rassemblé les résultats des expérimentations menées par A.Al Shaer[4] au LAMI. L'objectif initial des deux thèses menées au LAMI simultanément était de pouvoir indiquer, en fonction de la sollicitation (vitesse) en régime permanent et de la nature du sol, le tassement d'une voie ferrée ballastée.

Nous avons pensé utiliser comme lien entre les entrées du modèle [vitesse, nature du sol] et les sorties [tassement, déflexion], l'accélération de la voie et en particulier l'accélération verticale maximale (vers le haut et/ou vers le bas) dans le ballast ou le blochet.

Le travail s'est alors décomposé en deux parties complémentaires :

- la première était la recherche d'une loi de tassement expérimentale [4] en fonction de l'accélération présente dans la voie ;
- la seconde était l'élaboration d'un modèle de voie permettant, en fonction de données sur la vitesse du train et de la nature du sol, de donner la valeur de l'accélération maximale.

Ainsi, dans ce chapitre, on va rappeler les principaux résultats du travail expérimental de A.Al Shaer, avant d'indiquer les résultats sur les modèles de voie étudiés. Cette étude comparant les modèles de voie utilisant les lois de comportement développées dans le chapitre 7 avec les résultats expérimentaux, permettra d'une part de retenir (ou pas) une ou plusieurs des lois de comportement en fonction des performances respectives (vitesse de calcul et précision). D'autre part, on pourra proposer une modélisation de la voie ferrée la plus simple et la plus fidèle possible. Trois modélisations ont été testées : deux maillages de tranches longitudinale et transversale, et un maillage complet du banc d'essai BESTT<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Banc d'Essai sur Trois Traverses

## 9.2 Le banc d'essai à échelle un tiers BESTT [4]

### 9.2.1 Description, conception

Le banc d'essai à échelle un tiers BESTT<sup>2</sup> a été élaboré au LAMI<sup>3</sup> en collaboration avec la SNCF et d'autres unités du LCPC. Cet essai représente une portion de voie constituée de trois traverses (bi-blocs) afin de simuler le passage d'une charge roulante sur la portion. Dans l'essai BESTT (fig.9.1), les traverses sont sollicitées par trois vérins hydrauliques qui fournissent des signaux ayant la forme d'un "M". Les vérins appliquent sur les traverses ce "M" avec un décalage dans le temps pour simuler le mouvement d'un bogie sur les traverses.

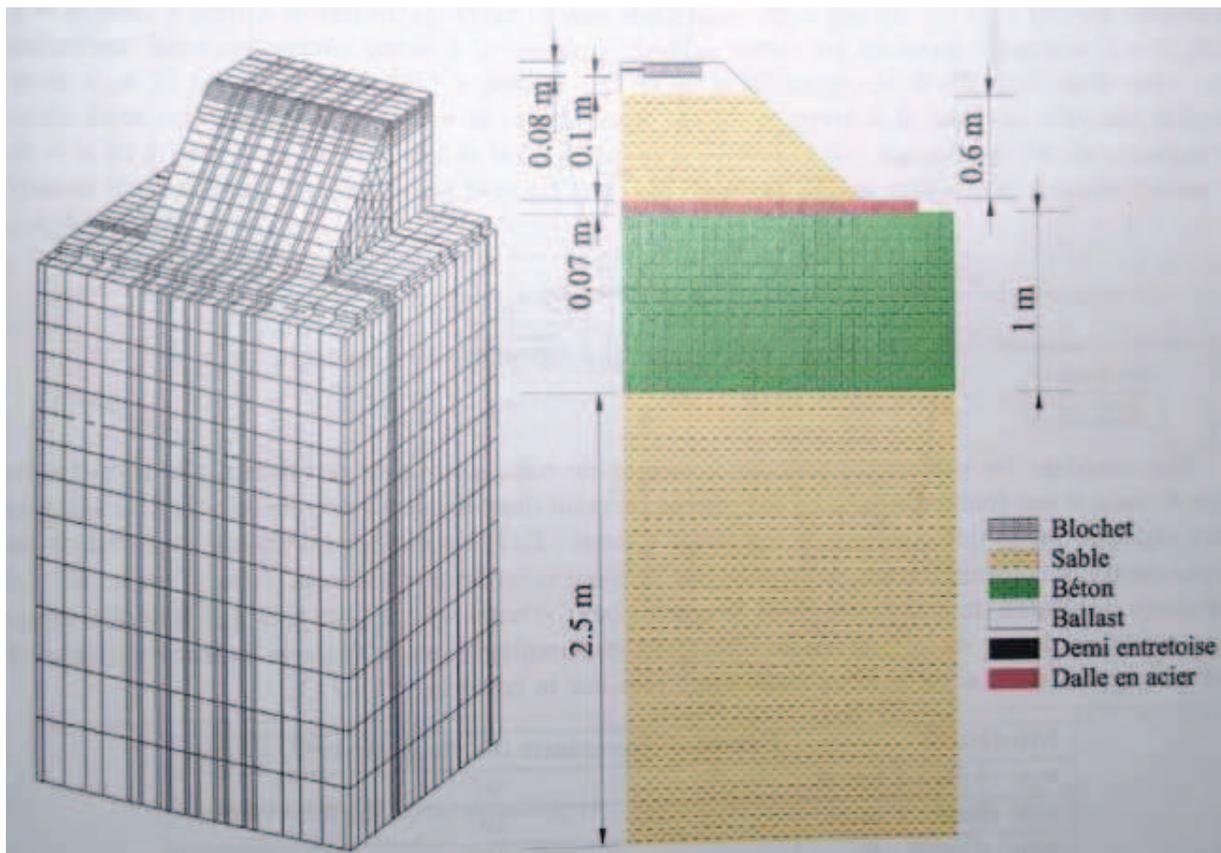


FIG. 9.1 – Banc d'essai à échelle réduite BESTT

L'éprouvette comporte une couche de ballast à échelle un tiers (micro-ballast), reposant sur une couche de sable représentant la couche d'assise. Les traverses sont posées sur 10cm de microballast (équivalant à 30cm à échelle réelle), et sont entourées de microballast. L'ensemble est posé sur un massif contenant plusieurs couches de matériaux différents afin de bien simuler un demi-espace infini. La couche de ballast est limitée par les deux côtés par des plans inclinés (talus) qui représentent les bords libres du ballast. Le portique, solidaire de la dalle et supportant les vérins à paliers hydrostatiques, a été dimensionné par le LCPC. Trois traverses sont chargées par l'intermédiaire de pièces de répartition en acier, de manière à pouvoir obtenir un niveau de chargement vertical identique sur deux blochets de la même traverse. Le passage

<sup>2</sup>Banc d'Essai sur Trois Traverses

<sup>3</sup>Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification

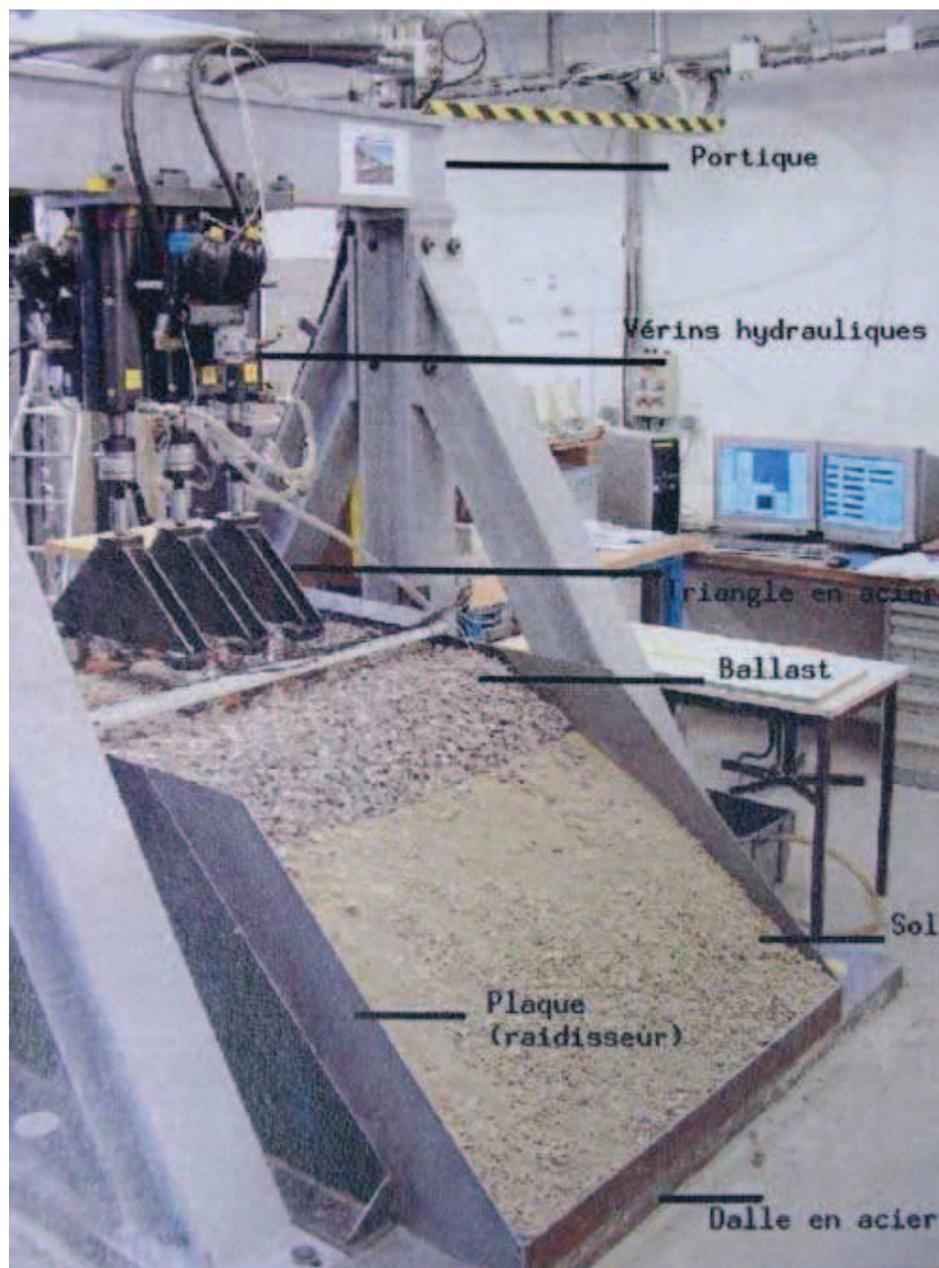


FIG. 9.2 – Photo du Banc d'essai à échelle réduite BESTT

des trains est simulé par des signaux appliqués sur chaque traverse, avec un décalage dans le temps, à l'aide de vérins hydrauliques.

Le massif comprend, du haut vers le bas, une dalle d'acier (0.07m d'épaisseur), une couche de béton (1m) entourée par des plaquettes de polystyrène, et pour finir une couche de 2.5m de sable. Tous les constituants du banc d'essai sont supportés par une fondation en béton armé capable de porter le poids important du banc.

Comme on l'a indiqué dans la partie bibliographie, on utilise les lois de similitude correspondant à l'hypothèse de la conservation du champ d'accélération. Il en résulte pour passer des grandeurs réelles aux grandeurs à échelle un tiers :

La charge appliquée sur les traverses est une charge cyclique. Les essais consistent à si-

TAB. 9.1 – Tableau des règles de similitude pour la conservation du champ d'accélération

Grandeur	unité	facteur d'échelle
Accélération	$m.s^{-2}$	1
Masse volumique	$m.s^{-3}$	1
Longueur	m	$\frac{1}{3}$
Masse	kg	$\frac{1}{27}$
Forces	N	$\frac{1}{27}$
Contraintes	$N.m^{-2}$	$\frac{1}{3}$
Vitesses	$m.s^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Temps	s	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Fréquences	Hz	$\sqrt{3}$

muler le passage d'un train sur trois traverses en appliquant un signal reproduisant le passage d'un bogie. Comme un train se compose de plusieurs bogies, il faut appliquer successivement plusieurs signaux. Par la suite, on appelle "cycle" le passage d'un bogie.

Pour simuler le passage d'un bogie, un signal de forme "M" est utilisé, les pics de ce signal correspondant aux essieux d'un bogie. On rappelle que la formulation analytique de ce signal s'exprime habituellement :

$$F(t, Q, v) = \frac{QY}{2} [X(\frac{vt-a}{d})^2 + X(\frac{vt-a-L}{d})^2] \quad (9.1)$$

où :  $F$  est la force appliquée sur la traverse,  $Q$  la charge à l'essieu (17 tonnes en moyenne),  $v$  la vitesse du train,  $t$  le temps,  $d$  la distance entre les traverses (0.6m),  $a$  une distance critique ( $a = 5d = 3m$ ),  $L$  la distance entre deux essieux d'un bogie (3m),  $X$  et  $Y$  étant deux grandeurs sans dimension comprises entre 0 et 1.

En utilisant la règle de similitude définie plus haut, la force à appliquer à l'échelle un tiers se traduit par :

$$F_{\frac{1}{3}}(t, Q, v) = \frac{QY}{27} [X(\frac{vt-a}{d})^2 + X(\frac{vt-a-L}{d})^2] \quad (9.2)$$

où les grandeurs de la formule sont toutes les grandeurs à échelle réduite.

Le dimensionnement du banc a consisté à identifier les couches de matériau et leur épaisseur sous la dalle en acier pour vérifier les trois critères suivants :

- la dalle en acier est rigide par rapport au comportement de la portion de voie. Cela revient à écrire que le module de l'accélération sur la surface de la dalle ne doit pas dépasser 1% de l'accélération gravitationnelle. Cela assure que la dalle et par suite les couches en dessous restent rigides par rapport au comportement du banc.
- La vibration induite par le fonctionnement du banc ne doit pas être gênante pour les personnes voisines de l'expérience. Pour cela, on utilise les courbes de M.Harris et E.Crede [35] représentées sur la figure 9.3.
- Le massif se comporte comme un demi-espace infini : il n'y a pas d'onde réfléchi sur les parois.

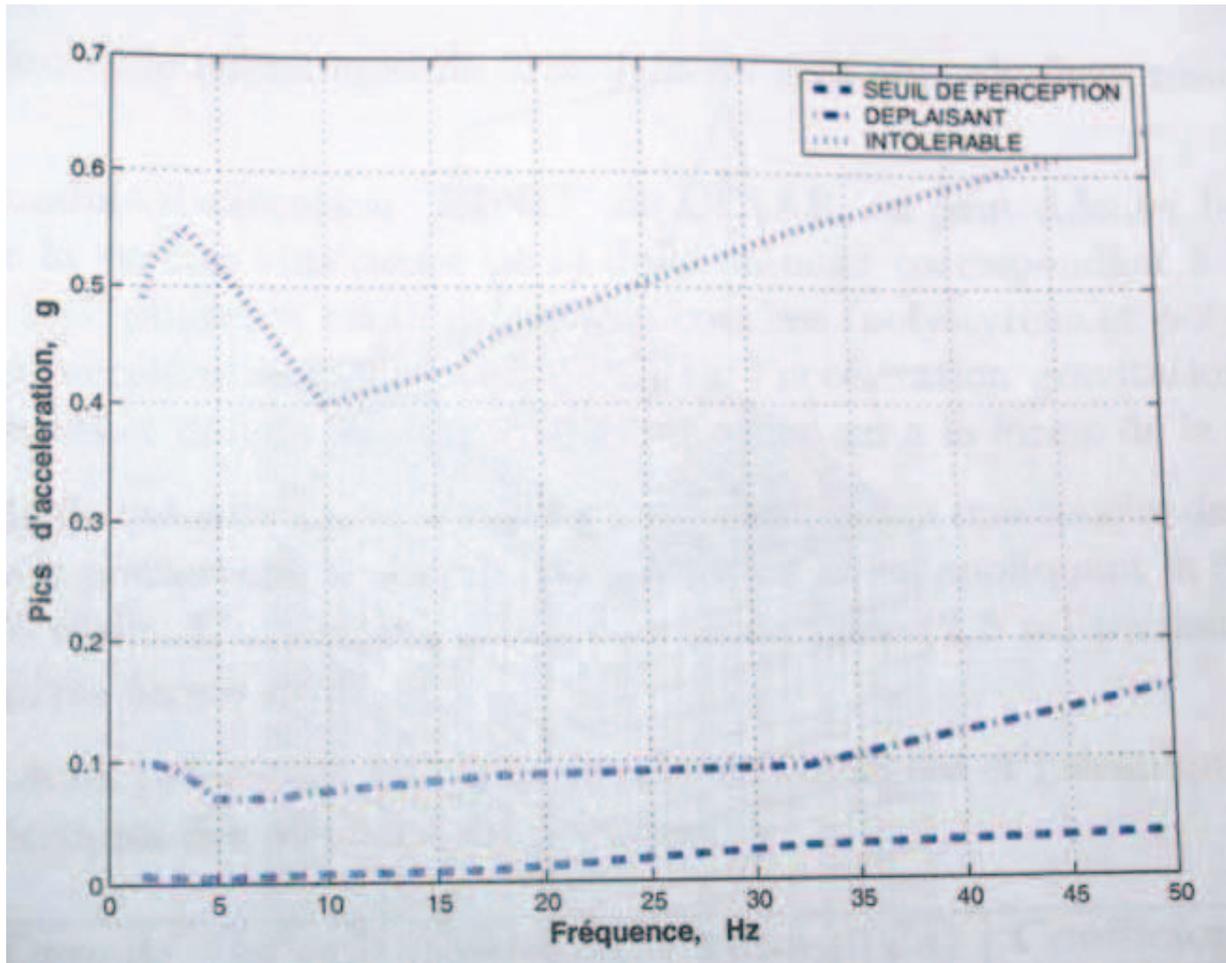


FIG. 9.3 – Seuils d'accélération à plusieurs fréquences pour lesquels les sujets perçoivent la vibration, la trouvent déplaisante, ou refusent de la supporter. Expositions pour des durées de 5 à 20 minutes

## 9.2.2 Résultats expérimentaux

Une vingtaine d'essais avec trois types de conditions de sol ont été réalisés. Ainsi chaque type d'essai a été répété trois à quatre fois dans un souci de répétabilité des mesures effectuées. Les vérins ont simulé le passage des bogies pour les vitesses de : 160, 220, 320 et 400 km/h. Les capteurs d'accélération et de déplacement sont situés au niveau des traverses. Les résultats [4] issus des sollicitations cycliques à ces vitesses sont données par le tableau (Tableau (9.2.2)).

Dans ce tableau, l'accélération et le déplacement élastique augmentent avec la vitesse. On remarque en outre que l'accélération est de l'ordre de la valeur de la gravité dès qu'on atteint la vitesse de 320 km/h.

- Avec des simulations sur des centaines de milliers de cycles, A. Al Shaer [4] a montré que :
- plus le nombre de vérins est élevé, plus on se rapproche de la modélisation réelle du passage d'un train. Les incréments de tassement de la traverse centrale obtenus à l'aide d'essais avec trois vérins sont deux à quatre fois plus élevés que ceux obtenus avec un vérin pour une vitesse inférieure à 360 km/h, et dix fois plus élevés pour une vitesse de 400 km/h. Ces écarts montrent l'importance du nombre de vérins. On ne peut donc pas se satisfaire pour des vitesses élevées d'un nombre de vérins réduit afin de modéliser une voie ferrée ballastée.

TAB. 9.2 – Résultats des expérimentations pour les essais 2, 3, 6, 7 sur : le déplacement élastique maximal  $\delta_e$ , l'accélération maximale vers le bas  $a_{haut}$  et l'accélération maximale vers le haut  $a_{bas}$  du blochet gauche de la traverse centrale en fonction de la vitesse de sollicitation des vérins  $v$  et de la force de sollicitation  $F_{MAX}$

$F_{MAX}$ (N)	$v$ ( $m.s^{-1}$ )	$\delta_e$ mm	$a_{haut}$ ( $m.s^{-2}$ )	$a_{bas}$ ( $m.s^{-2}$ )
1656	160	0.1666	1.148	1.105
1717	210	0.1624	1.915	1.546
1799	270	0.158	3.174	2.337
2033	320	0.2007	8.705	4.943
2172	360	0.2083	13.29	8.606
2460	400	0.2795	29.69	17.65

- Pour les déplacements élastiques ainsi que pour les accélérations de la traverse centrale, les écarts sont plus faibles entre trois et un vérin : le facteur n'est que de 1.3. Ce rapport augmente avec la vitesse de roulement.

En ce qui concerne le tassement, objet principal de l'étude de la thèse d'A.Al Shaer[4], on peut déjà mettre en évidence qu'il dépend fortement de la vitesse de sollicitation (fig.9.4 pour un vérin ou fig.9.5 pour trois vérins), de la faiblesse de la rigidité du sol.

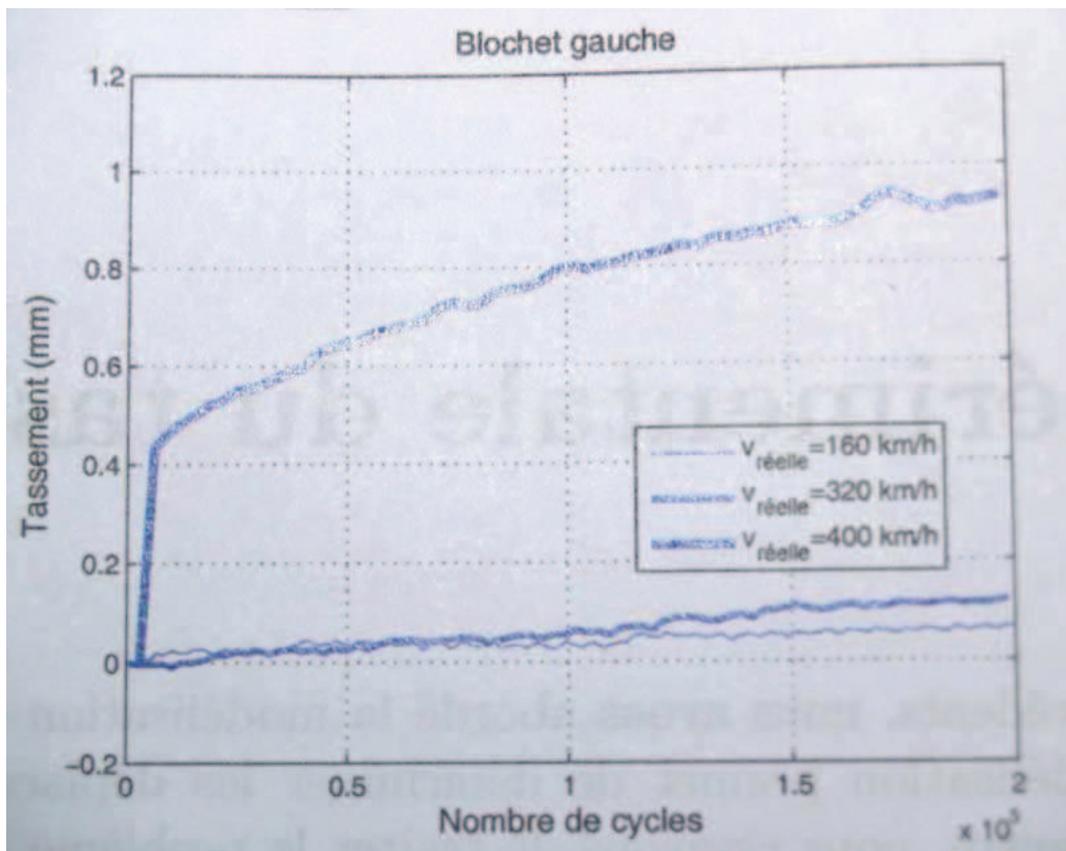


FIG. 9.4 – Influence de la vitesse sur le tassement avec une sollicitation par un seul vérin

Un des buts des essais est de trouver une loi expérimentale de tassement qui peut être

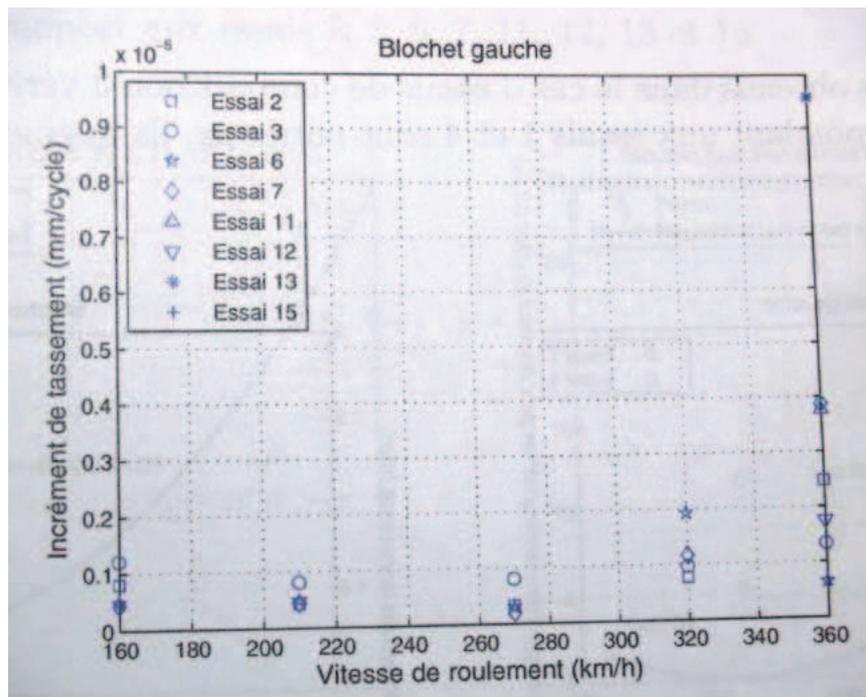


FIG. 9.5 – Influence de la vitesse sur le tassement avec une sollicitation sur trois vérins

valable pour de grandes vitesses. V.Bodin[14] avait mis en évidence une loi de tassement valable si l'accélération dans le banc d'essai ne dépassait pas  $1.4g$ , où  $g$  est l'accélération gravitationnelle. Or, aux grandes vitesses, cette valeur d'accélération critique est fréquemment dépassée. C'est pourquoi, on pense que la loi de tassement comprend un facteur dynamique tel que l'accélération. Pourtant, après plusieurs tentatives, il n'a pas été possible de mettre en évidence une relation entre l'incrément de tassement et l'accélération avec une forte corrélation (fig.9.6).

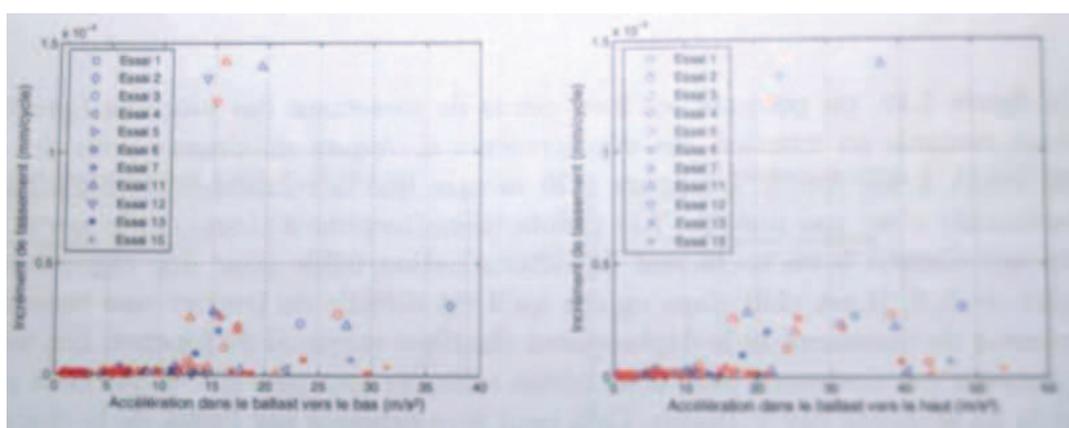


FIG. 9.6 – Incrément de tassement en fonction de l'accélération dans le ballast

En effet, la principale difficulté vient de la dispersion des données, dispersion d'autant plus importante que la vitesse est élevée, et que donc les accélérations du ballast et du blochet

sont plus importantes. Ainsi, des relations entre l'écart type<sup>4</sup> de l'incrément de tassement et notamment les accélérations moyennes vers le haut ou vers le bas (fig.9.7). Or, de plus, il existe une relation entre l'incrément de tassement et son écart-type (fig.9.8). Donc, il est possible de trouver une relation directe qui peut être représentée par une loi de puissance entre l'incrément de tassement et les autres paramètres telle que l'accélération.

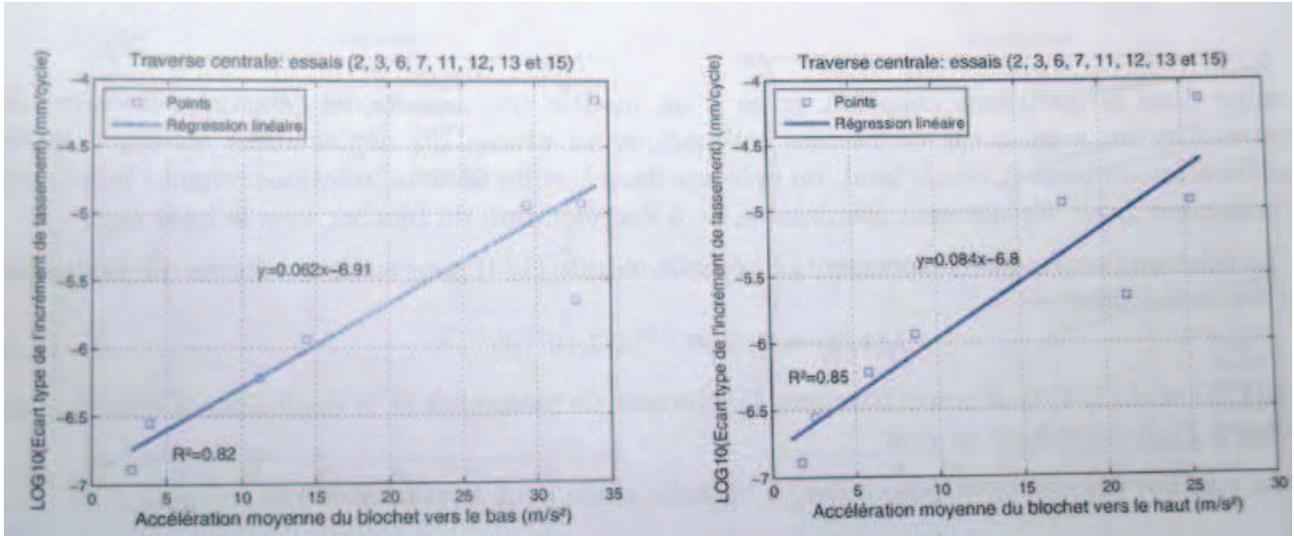


FIG. 9.7 – Ecart-type de l'incrément de tassement en fonction de l'accélération du blochet

On obtient alors expérimentalement les relations suivantes :

$$I_t(1/3) = 5.5 \times 10^{-10} (3.7 \times 10^{17})^{d_{e(1/3)}} \quad (9.4)$$

$$I_t(1/3) = 2.9 \times 10^{-7} \times 1.2^{a_{blh}} \quad (9.5)$$

$$I_t(1/1) = 16.5 \times 10^{-10} (7.18 \times 10^5)^{d_{e(1/1)}} \quad (9.6)$$

$$I_t(1/1) = 8.7 \times 10^{-7} \times 1.2^{a_{blh}} \quad (9.7)$$

où :  $I_t(1/3)$ ,  $I_t(1/1)$  désigne l'incrément de tassement à échelle réduite ou réelle (en mm), ( $d_{e(1/3)}$ ,  $d_{e(1/1)}$ ) le déplacement élastique à échelle un tiers ou réelle (en mm), et  $a_{blh}$  l'accélération du blochet vers le haut (en  $m.s^{-2}$ ).

### 9.3 Coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers : cas pseudo 2D

Plusieurs sollicitations ont été testées par A.Al Shaer dans son travail expérimental. L'une d'entre elles a été la sollicitation de la seule traverse centrale. C'est cette sollicitation sur cette traverse centrale sous forme de M (fig.9.9, déjà présentée dans le chapitre 6) qui est appliquée sur le blochet central.

<sup>4</sup>L'écart-type  $\sigma$  est défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - x_m)^2}{n - 1}} \quad (9.3)$$

où :  $n$  représente le nombre de mesures,  $x_i$  la "ième" valeur sur une série de  $n$  mesures, et  $x_m$  la valeur moyenne sur une série de  $n$  mesures.

### 9.3 Coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers : cas pseudo 2D41

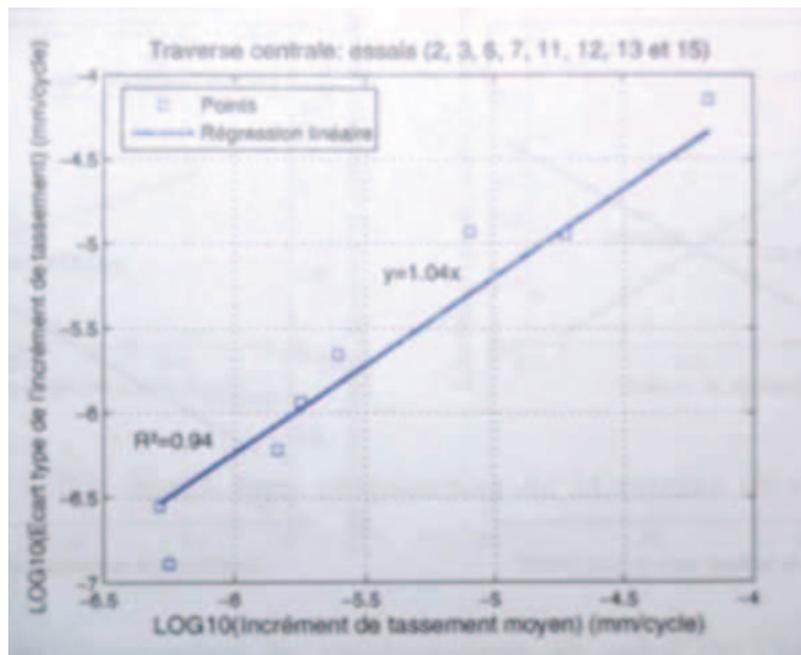


FIG. 9.8 – Incrément de tassement moyen en fonction de son écart-type

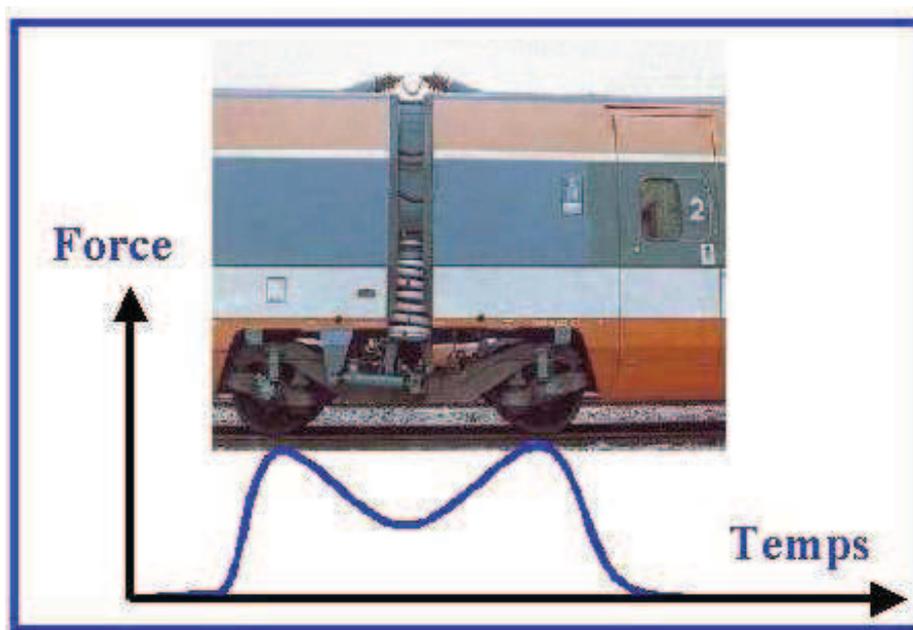


FIG. 9.9 – Signal de la force en M, signal modélisant le passage d'un essieu

Pour des raisons de ddl (degrés de liberté) et afin de tester la robustesse des développements dans le code CESAR-LCPC, on a construit une modélisation sur une tranche transversale du banc d'essai à échelle un tiers.

Le but de ce modèle est de déterminer (avec le moins de temps de calcul possible) les lois de comportement les plus adaptées à la problématique de la modélisation du ballast : on utilisera pour cela des comparaisons entre les résultats des mesures et des modèles après un calage des

paramètres des modèles sur le cas linéaire continu avec une sollicitation de 10Hz<sup>5</sup>.

### 9.3.1 Présentation du maillage

Il s'agit de la représentation d'une tranche du banc d'essai à échelle un tiers sur une épaisseur d'un grain moyen de ballast (0.0137m<sup>6</sup>). Le ballast a une rigidité de 200MPa, et le sol est calé<sup>7</sup> à 65MPa. La loi de comportement du sol en-dessous du ballast est élastique linéaire continue [LC], alors que la loi de comportement du ballast varie.

La descente de charge sous le blochet est verticale comme l'indique la thèse de G.Saussine[69]. Le tableau (tab.(9.3)) donne les valeurs des différents paramètres présents dans ce maillage. On considère le schéma sur la figure (fig. 9.11) qui représente le schéma du maillage de la coupe transversale.

TAB. 9.3 – Tableau des paramètres du maillage de la coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers

Grandeur	Abréviation	Valeur
Module d'Young blochet	$E_{bl}$	25GPa
Masse volumique blochet	$\rho_{bl}$	2500kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson blochet	$\nu_{bl}$	0.2
Module d'Young ballast chargé	$E_b$	200MPa
Masse volumique ballast chargé	$\rho_b$	1700kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson ballast chargé	$\nu_b$	0.25
Module d'Young ballast non-chargé	$E_{be}$	8MPa
Masse volumique ballast non-chargé	$\rho_{be}$	1700kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson ballast non-chargé	$\nu_{be}$	0.25
Module d'Young sous-sol	$E_s$	65MPa
Masse volumique sous-sol	$\rho_s$	2100kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de Poisson sous-sol	$\nu_s$	0.25

Dans la mesure où il y a un plan de symétrie dans le banc d'essai à échelle un tiers (plan médiateur des traverses bi-blocs), on ne représente que la moitié du banc.

On représente ici uniquement une tranche d'épaisseur un grain (fig.9.10), ce qui permet d'assimiler ce modèle à un cas pseudo 2D, perpendiculaire au sens de parcours de la charge.

Afin d'éviter les ondes de retour, on introduit un amortissement numérique en huit étapes d'amortissement (zone en jaune sur le schéma (fig.9.11)).

Une force répartie sur une partie du blochet (comme l'est la force transmise par un rail sur une partie du blochet) s'applique. L'intensité, la variabilité temporelle seront détaillées dans les sections suivantes en fonction du signal testé.

<sup>5</sup>Dans le travail d'A.Al Shaer, il s'agit des essais "d'identification" : ils sont menés sur avec sollicitations sinusoïdales notamment à 10Hz à différents moments de l'expérimentation.

<sup>6</sup>En effet, il s'agit d'une taille réduite au tiers de la taille normale

<sup>7</sup>ce calage est effectué à partir des mesures à 10Hz et des résultats des simulations avec une loi de comportement élastique linéaire continue [LC]

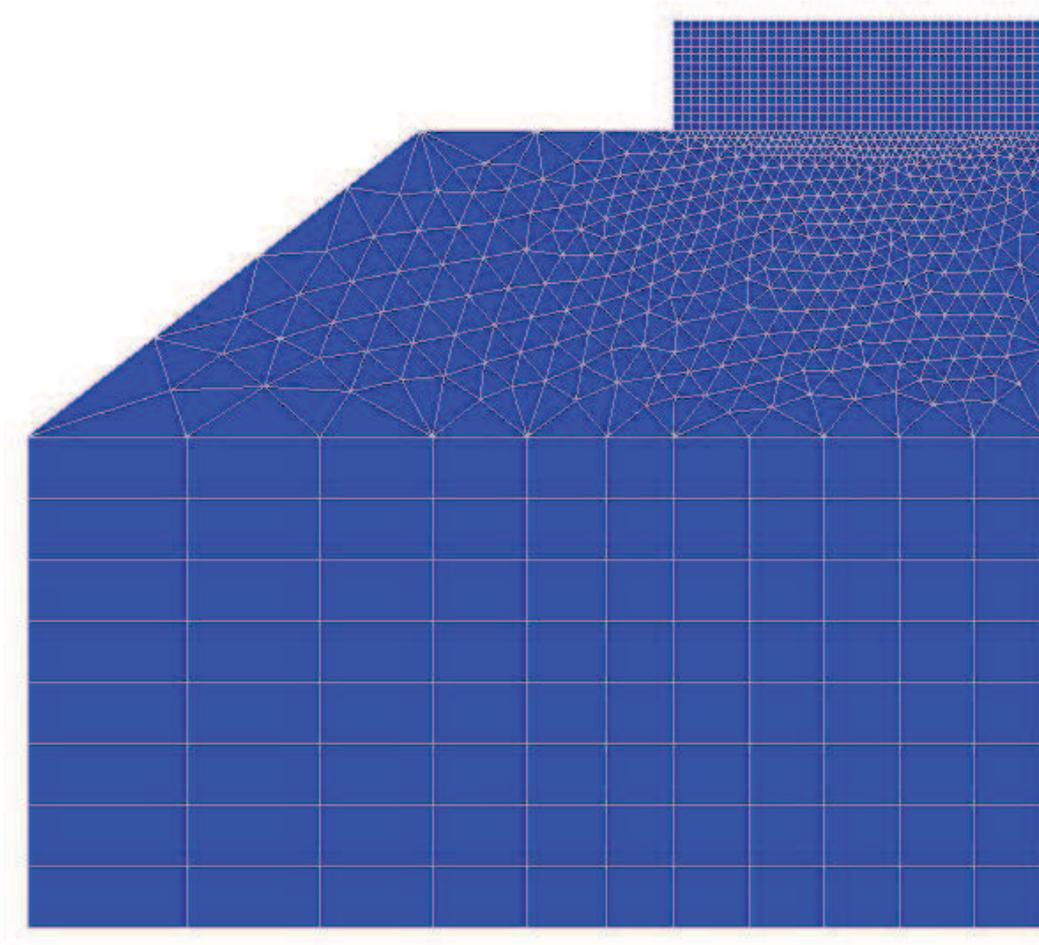


FIG. 9.10 – Maillage d'une coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers

### 9.3.2 Cas statique linéaire

Les modèles développés numériquement non-linéaires ne fonctionnent pas en statique. On utilise un modèle linéaire statique. On remarque dans la figure 9.13 pour une charge de 1N réparti sur un blochet, que la descente de charge est verticale, fait que l'on a observé sur des simulations de dynamique moléculaire[69].

Ainsi, grâce à une adaptation de la rigidité, on a pu retrouver le fait de la descente de charge verticale.

### 9.3.3 Comparaison des signaux entre le cas pseudo 2D et la modélisation complète du banc pour une sollicitation sur un seul vérin

#### Choix de la simulation expérimentale et traitement des données :

A. Al Shaer a répété plusieurs fois (en général trois fois) les mêmes simulations. En fonction des résultats des simulations (et de leur variabilité), on a choisi les signaux d'accélération et de déplacement verticaux "moyens"<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>En réalité, ce choix est plus difficile qu'il n'y paraît : sur les centaines de milliers de cycles de simulation, il faut en exhiber un qui représente une sorte de moyenne des cas de simulation. Cela signifie que les valeurs

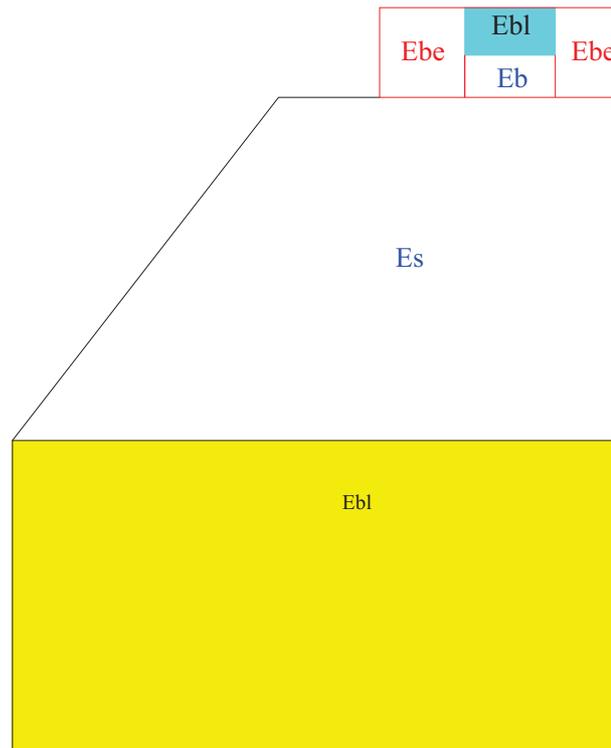


FIG. 9.11 – Schéma du maillage de la coupe transversale

Nous avons également lissé un peu les courbes expérimentales à l'aide d'une moyenne glissante à trois points ( $M'(t)$ ), définie par :

$$M'(t) = \frac{M(t-1) + M(t) + M(t+1)}{3} \quad (9.8)$$

A cause du signal d'entrée (fig.9.14), les résultats des simulations numériques sont également bruités. On utilisera donc le même schéma de lissage pour les courbes numériques.

Les résultats à 160km/h sont indiqués sur le tableau (Tab. 9.3.3) :

#### Analyse du tableau des résultats pour la vitesse 160km/h :

On remarque d'abord que les simulations de [LC] et de [BL8] sont rigoureusement identiques. A la réflexion, cela ne semble pas être très étonnant, puisque [LC] est la discrétisation d'un modèle continu linéaire élastique, alors que [BL8] est construit de manière discrète, mais de telle sorte à être équivalent à la discrétisation du milieu continu. On abandonne donc le modèle [BL8] dont l'originalité était d'introduire une dimension caractéristique du paramètre de maille dans la modélisation. Or, dans l'approche "éléments finis", cette taille existe par construction, à condition de respecter la taille des grains de ballast, au moins ceux qui sont sollicités directement par la descente de charge.

Les modèles [VNLU] et [LC] sont de très loin (sur l'accélération<sup>10</sup>) les plus proches des expérimentations. Ce sont donc les deux seuls que nous exploiteront par la suite. Malgré tout,

maximales expérimentales choisies sont les valeurs "moyennes".

<sup>10</sup>c'est le paramètre de liaison, donc il s'agit du critère de discrimination parmi les lois de comportement

### 9.3 Coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers : cas pseudo 2D145

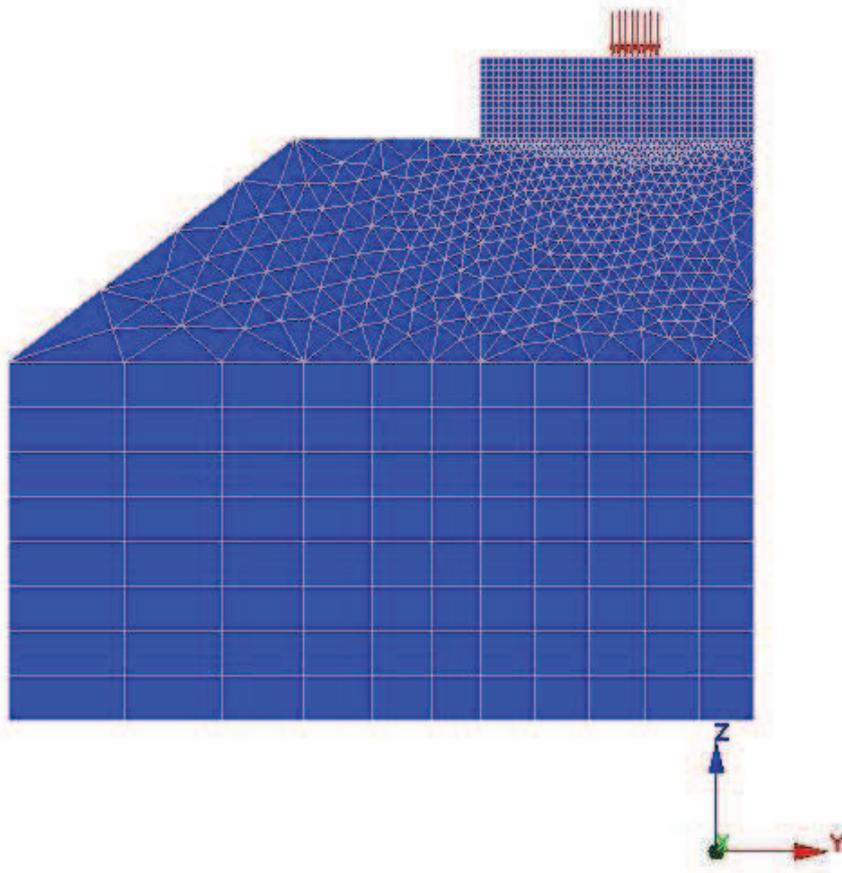


FIG. 9.12 – Maillage d'une coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers sous l'action d'une force surfacique

TAB. 9.4 – Tableau des écarts entre les mesures expérimentales et numériques à 160km/h pour l'accélération maximale vers le bas  $a_b$ , l'accélération maximale vers le haut  $a_h$ , le déplacement maximal vers le bas  $\delta_b$ , les écarts entre la solution expérimentale et la solution numérique pour les accélérations vers le haut ( $ee_{ah} = \frac{a_{num} - a_{exp}}{a_{exp}}$ ), vers le bas ( $ee_{ab}$ ) et pour le déplacement vertical vers le bas ( $ee_d$ )

Modèles	$a_h$ (en $m.s^{-2}$ )	$a_b$ (en $m.s^{-2}$ )	$\delta_b$ (en $mm$ )	$ee_{ah}$ (en %)	$ee_{ab}$ (en %)	$ee_d$ (en %)
Mesures	1.02	0.86	0.247	0	0	0
LC	1.15	1.07	0.253	12.7	19.6	2.4
BL8 <sup>9</sup>	1.15	1.07	0.253	12.8	19.6	2.3
BLU	3.65	3.27	0.257	257	280	4.1
BNL8	3.36	3.2	0.250	229	272	1.05
VLU	3.98	4.43	0.248	290	415	0.33
VNL	2.1	4.02	0.334	105	367	35
VNLU	1.25	1.31	0.26	23	52	5.2

comme le modèle [VNLU] est non-linéaire, le temps de calcul est sans commune mesure : 1000 fois plus long ! L'algorithme de résolution est en effet plus complexe pour les cas non-

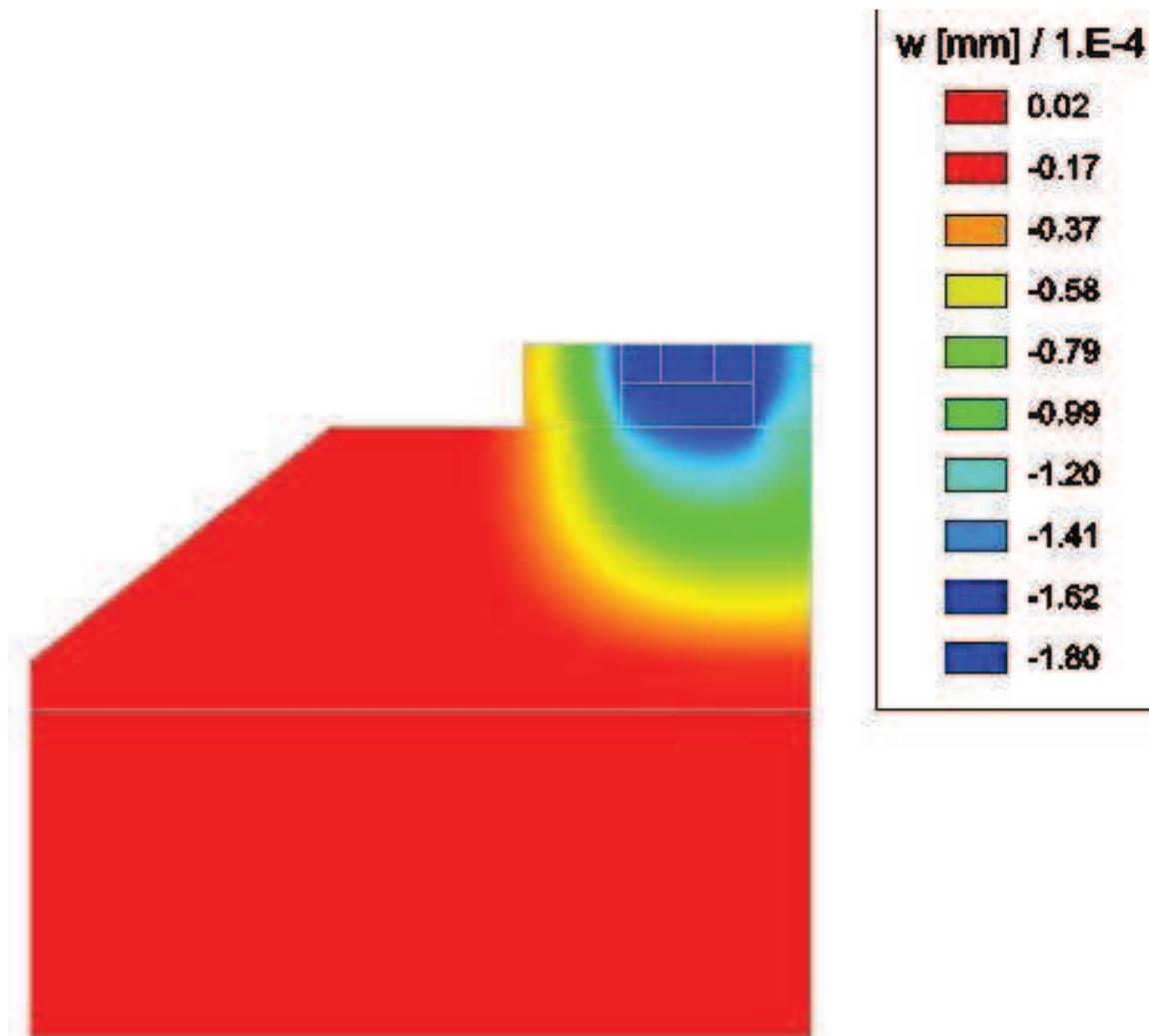


FIG. 9.13 – Distribution du déplacement vertical dans la coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers sous l'action d'une force surfacique homogène statique

linéaires.

A 320 et 400km/h, les résultats sont indiqués sur le tableau (tab.(9.5)). On remarque sur ce tableau que la modélisation [LC] est presque toujours meilleure que la modélisation [VNLU] tant en précision qu'en temps de calcul. Par conséquent, la loi de comportement [VNLU] ne paraît pas pertinente pour la modélisation de la voie retenue.

**Remarque :** Sur des modélisations plus homogènes, notamment dans le ballast, il n'est pas certain que ce résultat serait identique. Donc, le modèle [VNLU] est sans doute à conserver pour d'autres usages.

A noter, sur le même principe que les lissages introduits pour 160km/h, un lissage sur 7 points a dû être introduit sur les courbes d'accélération à 400km/h<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Soit  $M'(t)$  la moyenne sur sept points. On a :  $M'(t) = \frac{M(t-3)+M(t-2)+M(t-1)+M(t)+M(t+1)+M(t+2)+M(t+3)}{7}$

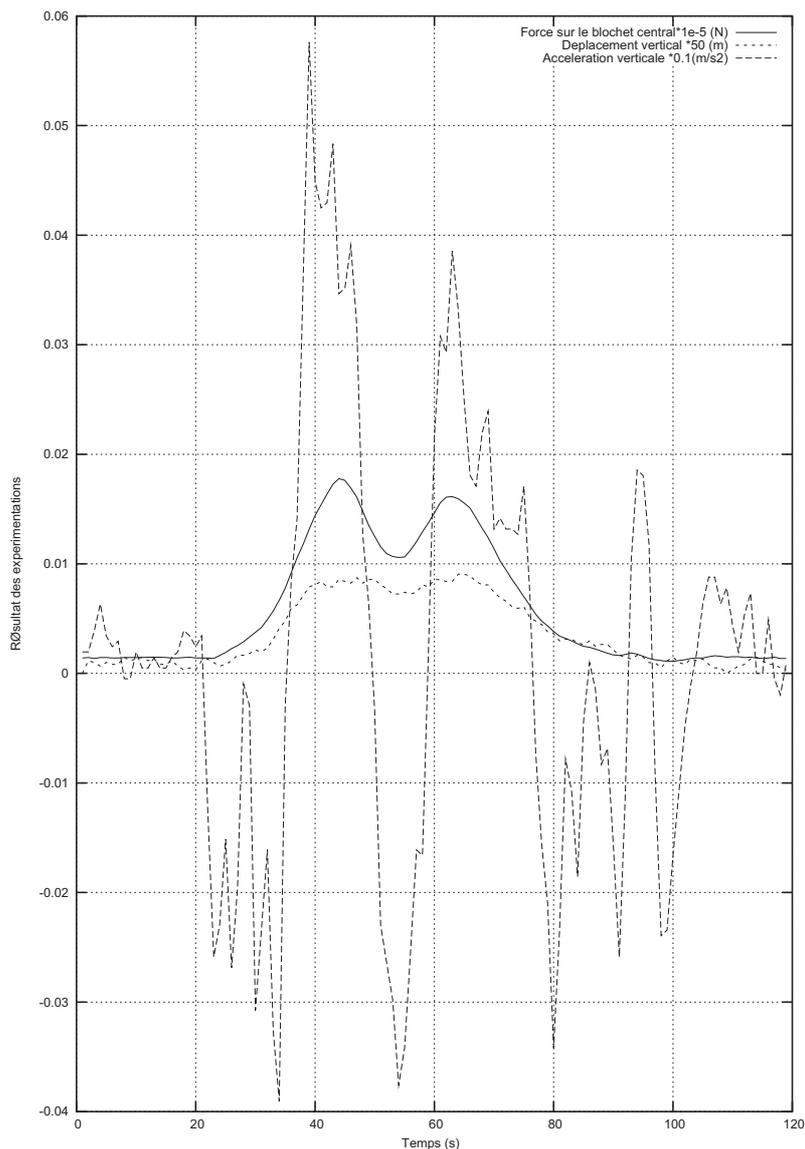


FIG. 9.14 – Distribution du déplacement vertical dans la coupe transversale du banc d'essai à échelle un tiers sous l'action d'une force surfacique homogène statique

#### 9.3.4 Conclusions-bilan

1. Les modèles introduits dans le chapitre précédent s'adaptent relativement mal au cas traité ici. Seuls les modèles [LC] et [VNLU] semblent rester relativement proches (y compris pour des vitesses élevées) des expérimentations[4].
2. Il n'existe pas de différence mesurable entre les lois de comportement [LC] et [BL8], d'autant que le maillage tient compte de la taille moyenne du grain de ballast. Les deux modèles sont relativement proches dans la méthode des éléments finis.
3. Le fait de tenir compte des faits expérimentaux qui indiquent que la descente de charge est plutôt verticale permettent d'avoir un modèle linéaire (par morceaux pour le ballast) en général plus efficace en termes de précision et de temps de calcul (de très loin). Mais cette descente de charge verticale en elle-même exprime une non-linéarité du ballast au niveau global.

TAB. 9.5 – Tableau des écarts entre les mesures expérimentales et numériques à 320km/h et 400km/h pour l'accélération maximale vers le bas  $a_b$ , l'accélération maximale vers le haut  $a_h$ , le déplacement maximal vers le bas  $\delta_b$ , les écarts entre la solution expérimentale et la solution numérique pour les accélérations vers le haut ( $ee_{ah} = \frac{a_{num} - a_{exp}}{a_{exp}}$ ), vers le bas ( $ee_{ab}$ ) et pour le déplacement vertical vers le bas ( $ee_d$ )

Modèles	$a_h$ (en $m.s^{-2}$ )	$a_b$ (en $m.s^{-2}$ )	$\delta_b$ (en $mm$ )	$ee_{ah}$ (en %)	$ee_{ab}$ (en %)	$ee_d$ (en %)
Mesures(320)	8.93	5.3	0.265	0	0	0
LC(320)	7.18	7.42	0.269	19.6	40	1.5
VNLU(320)	10.3	8.25	0.28	15.3	56	5.7
Mesures(400)	16.5	15.7	0.4	0	0	0
LC(400)	22	23.5	0.438	33	49	9.6
VNLU(400)	24.5	22.8	0.51	48.5	46	27.5

4. En fait le véritable paramètre important est la zone d'application de telle ou telle rigidité, en l'absence de loi universellement vérifiée. En effet, à cause de la nature granulaire, il est difficile d'appréhender globalement le comportement du ballast, surtout aux fortes vitesses, car des micro phénomènes de liquéfaction sont susceptibles d'apparaître çà et là de manière aléatoire.
5. Malgré tout, ici, il s'agit d'une charge en "M" mais sur un blochet uniquement. Au lieu d'aborder la propagation de la charge directement sur le cas 3D complet, on utilise le même principe que celui développé dans cette section : on va utiliser une coupe, cette fois longitudinale du banc d'essai à échelle un tiers.

## 9.4 Section pseudo-2D longitudinale

Dans le paragraphe précédent, on a introduit une modélisation quasi-2D qui tenait compte de la descente de charge constatée expérimentalement. Les essais numériques menés ont permis d'écarter les modèles développés dans le cadre du chapitre 7. En effet, compte tenu de la géométrie et de l'affectation des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson), les modèles discrets et continus envisagés, ont montré leurs limites avec un accroissement de la vitesse de sollicitation, en comparaison d'un modèle élastique linéaire continu inhomogène dans le ballast.

Toutes les expérimentations du paragraphe précédent traitent d'un chargement en "M" sur un seul vérin. On n'a donc pas d'effet de propagation de la charge. C'est pourquoi, le banc BESTT comprend trois vérins qui appliquent leurs chargements sur les trois blochets. Cette section a donc bien pour objectif de rendre compte de ce déplacement de la charge sur trois blochets. Mais, comme dans la section qui précède, on va utiliser un modèle de coupe longitudinale.

L'intérêt d'une telle approche par rapport à un modèle complet est d'une part le temps de calcul beaucoup plus réduit, mais aussi la faculté a priori de rendre compte plus fidèlement de la propagation de la charge.

### 9.4.1 Présentation du maillage

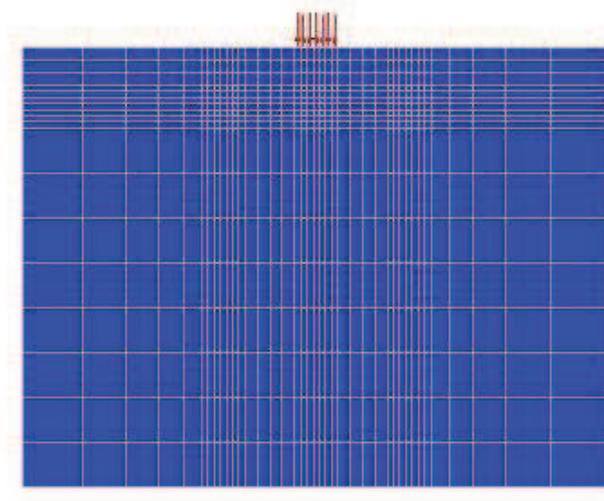


FIG. 9.15 – Maillage d'une coupe longitudinale du banc d'essai à échelle un tiers

Comme on a vu qu'une approche 2D pouvait être suffisante pour expliquer des valeurs d'accélération pour le cas d'une charge statique oscillante, on a eu l'idée de construire un maillage pseudo 2D permettant de tenir compte de la propagation de la charge. Ce maillage (fig.9.15) est une tranche longitudinale d'épaisseur un grain du banc d'essai à échelle un tiers du LAMI.

Le ballast sollicité a une rigidité de 200MPa, et le sol est calé<sup>12</sup> à 130MPa. La loi de comportement du sol en-dessous du ballast est élastique linéaire continue [LC], alors que la loi de comportement du ballast varie.

Le tableau (tab. (9.6)) donne les valeurs des différents paramètres présents dans ce maillage. On considère le schéma sur la figure (fig. 9.16) qui représente le schéma du maillage de la coupe longitudinale. Cette coupe longitudinale comprend les trois blochets sur lesquels les vérins agissent pour traduire le mouvement de la charge. La rigidité du ballast, comme dans la coupe transversale, est forte (descente de charge verticale) sous les blochets, tandis qu'elle est faible ailleurs.

### 9.4.2 Etude statique

**Cas d'une charge sur le blochet central** Il s'agit dans ce cas d'une charge de 1N qui a été répartie de manière homogène sur le blochet central. Le maillage de ce cas a été donné dans la section précédente (fig.9.15). Le résultat sur le déplacement vertical est présent sur la figure (fig.9.17). Comme dans les cas précédents, la descente de charge est verticale.

**Cas d'une charge sur les trois blochets du banc d'essais** Plusieurs cas ont été testés, soit avec des répartitions de forces surfaciques identiques entre les blochets (fig.9.18), soit non-identiques(fig.9.19).

<sup>12</sup>ce calage est effectué à partir des mesures à 10Hz et des résultats des simulations avec une loi de comportement élastique linéaire continue [LC]

TAB. 9.6 – Tableau des paramètres du maillage de la coupe longitudinale du banc d'essai à échelle un tiers

Grandeur	Abréviation	Valeur
Module d'Young blochet	$E_{bl}$	25GPa
Masse volumique blochet	$\rho_{bl}$	$2500kg/m^3$
Coefficient de Poisson blochet	$\nu_{bl}$	0.2
Module d'Young ballast chargé	$E_b$	200MPa
Masse volumique ballast chargé	$\rho_b$	$1700kg/m^3$
Coefficient de Poisson ballast chargé	$\nu_b$	0.25
Module d'Young ballast non-chargé	$E_{be}$	8MPa
Masse volumique ballast non-chargé	$\rho_{be}$	$1700kg/m^3$
Coefficient de Poisson ballast non-chargé	$\nu_{be}$	0.25
Module d'Young sous-sol	$E_s$	130MPa
Masse volumique sous-sol	$\rho_s$	$2100kg/m^3$
Coefficient de Poisson sous-sol	$\nu_s$	0.25

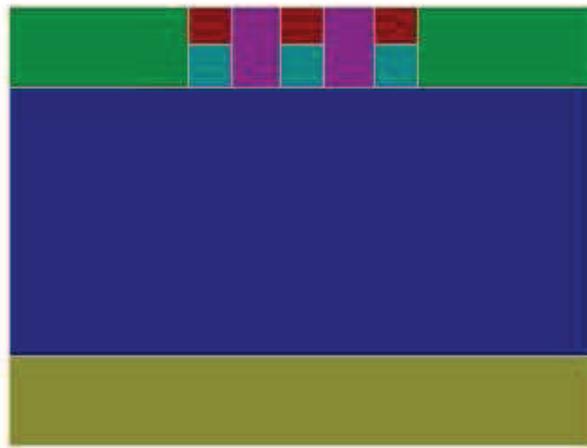


FIG. 9.16 – Schéma d'une coupe longitudinale du banc d'essai à échelle un tiers

Les cas de forces testés sont les suivants :

- trois forces identiques de un tiers de Newton pour chaque blochet (fig.9.20)
- trois forces identiques d'un Newton pour chaque blochet (fig.9.21)
- les deux forces extérieures à un quart de Newton et le blochet central à un demi Newton (fig.9.22)
- les deux forces extérieures à un cinquième de Newton et le blochet central à un demi Newton (fig.9.23). Cela revient à un schéma 1-3-1 pour la répartition de la charge de 1N sur les trois blocs.

#### Commentaires :

En comparant les figures du cas statique, on observe :

- que plus l'intensité de la force résultant est importante plus le déplacement est important, ce qui semble normal.

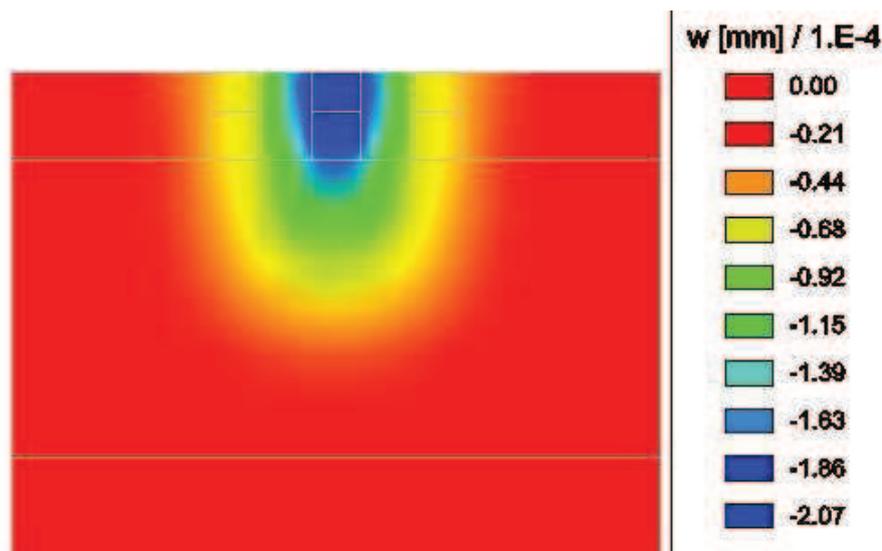


FIG. 9.17 – Maillage d’une coupe longitudinale du banc d’essai à échelle un tiers

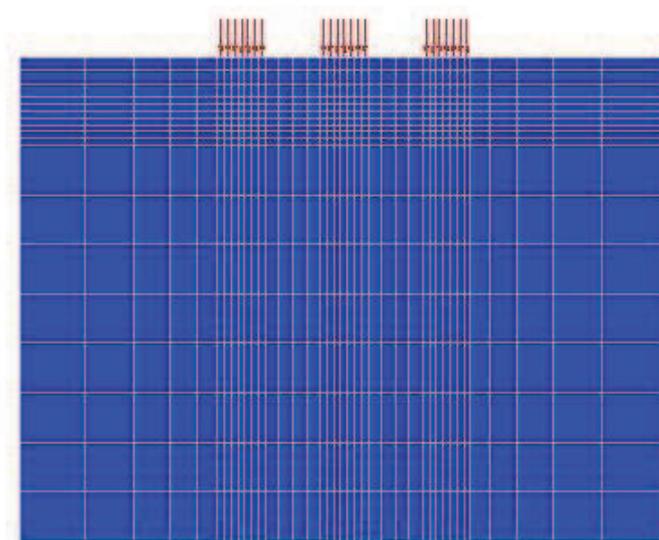


FIG. 9.18 – Forces identiques pour un maillage d’une coupe longitudinale du banc d’essai à échelle un tiers

- La zone d’enfoncement maximum (en bleu) est plus importante sous le blochet central que sous les autres blochets, y compris pour des forces identiques sur les trois blochets. Cela illustre l’interaction (pressentie) entre les blochets.
- Si la force de  $1N$  est répartie sur un blochet (le blochet central), l’enfoncement sous le blochet central sera plus faible que dans les configurations à trois blochets, même pour des forces résultantes de  $1N$  (sauf pour le cas de trois forces identiques). Cela vient accroître la portée du point précédent, et vient confirmer une observation faite en dynamique par A.Al Shaer[4]. Les déplacements maximum sont en effet les suivants :  $1,34 \times 10^{-4}m$  (cas d’une seule force de  $1N$  sur le blochet central),  $1,09 \times 10^{-4}m$  (cas 1-1-1 de résultante  $1N$ ),  $2,07 \times 10^{-4}m$  (cas 1-2-1 de résultante  $1N$ ),  $1,48 \times 10^{-4}m$  (cas

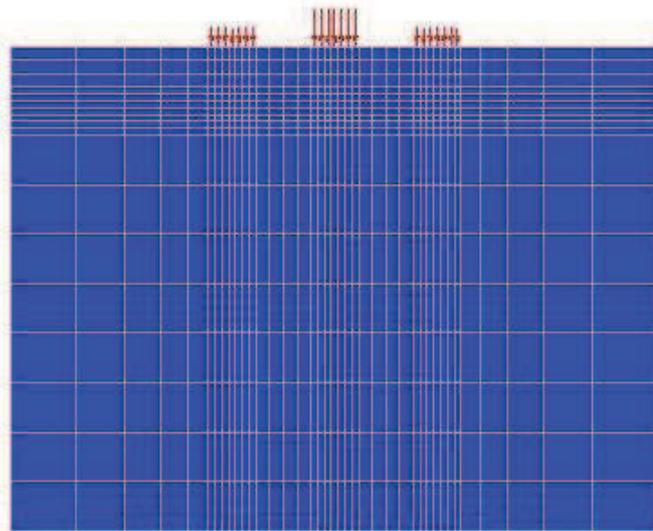


FIG. 9.19 – Forces non-identiques d'un maillage d'une coupe longitudinale du banc d'essai à échelle un tiers

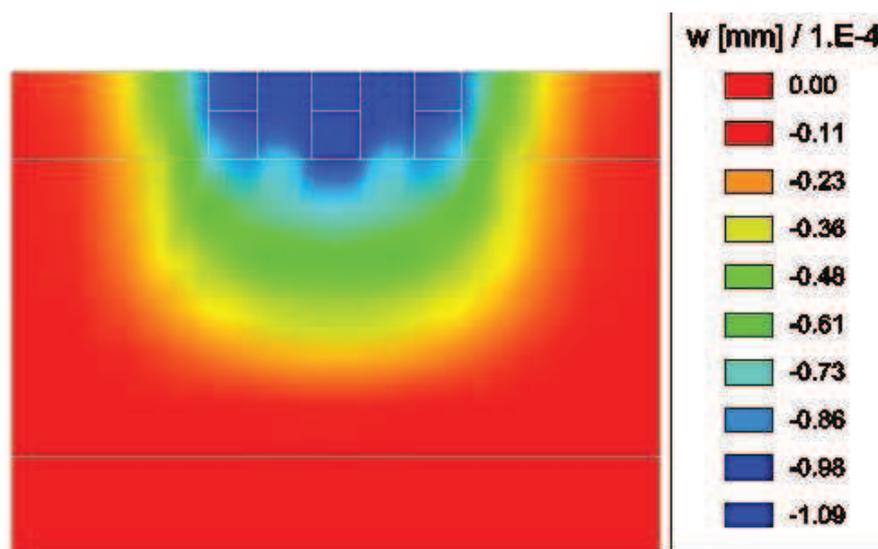


FIG. 9.20 – Dispersion du déplacement vertical pour la coupe transversale dans le cas 1-1-1 correspondant à la répartition de la charge de 1N sur les trois blochets

1-3-1 de résultante 1N).

Ainsi, suivant la configuration de la charge sur les voisins de la charge centrale, un effet de surcharge pourra être constaté sous le blochet central.

### 9.4.3 Dynamique du banc d'essai à échelle un tiers : coupe longitudinale avec un chargement immobile oscillant sur le blochet central

#### Choix de la simulation et traitement des données :

Conformément à ce qui a été fait dans la section concernant la coupe transversale du banc

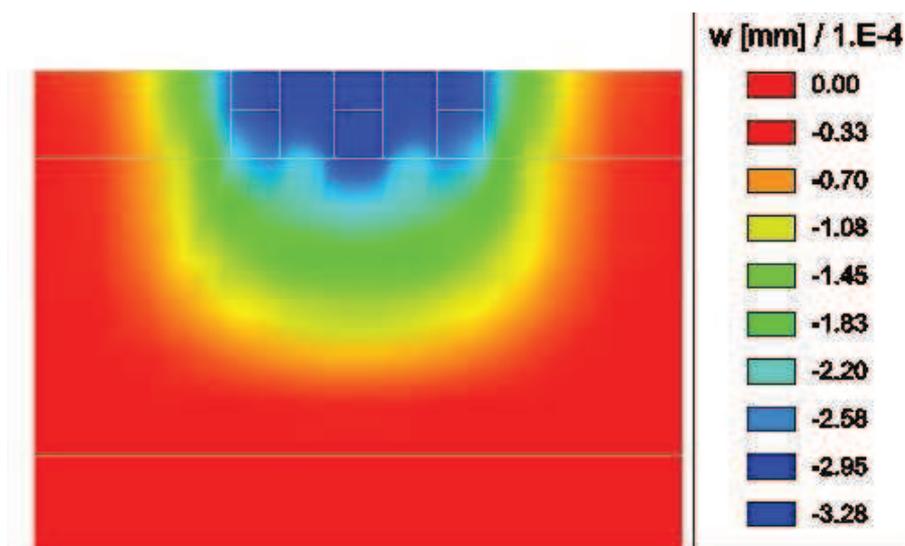


FIG. 9.21 – Dispersion du déplacement vertical pour la coupe transversale dans le cas 1-1-1 correspondant à la répartition de la charge de  $3N$  sur les trois blochets

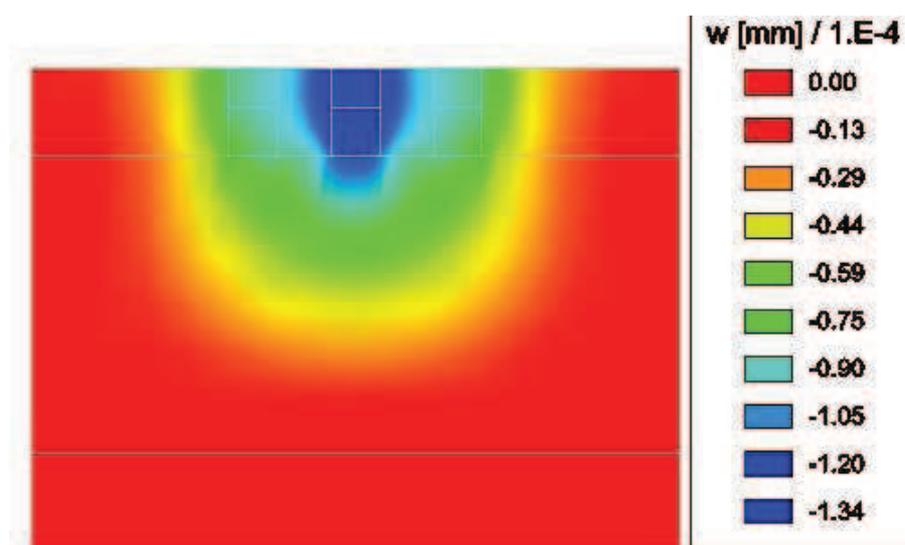


FIG. 9.22 – Dispersion du déplacement vertical pour la coupe transversale dans le cas 1-2-1 correspondant à la répartition de la charge de  $1N$  sur les trois blochets

d'essai, le choix des mesures a été fait en concertation avec A.Al Shaer[4] parmi les simulations ayant un comportement “moyen”.

Les courbes de mesures ont été lissées à l'aide d'une moyenne glissante sur trois points. “L'offset”, décalage dû aux capteurs, a été minimisé sur les déplacements en retranchant les déplacements déjà présents au début de la sollicitation.

Ce chargement immobile oscillant sur le blochet central simule des vitesses de roulement de 160, 320 et 400km/h. Le cas à 160km/h a été utilisé pour ajuster les caractéristiques du sol sous le ballast dans le cas linéaire par morceaux. La répartition par isovaleurs de déplacement vertical confirme une action préférentiellement verticale par cette modélisation (fig. 9.24,9.25 et 9.26).

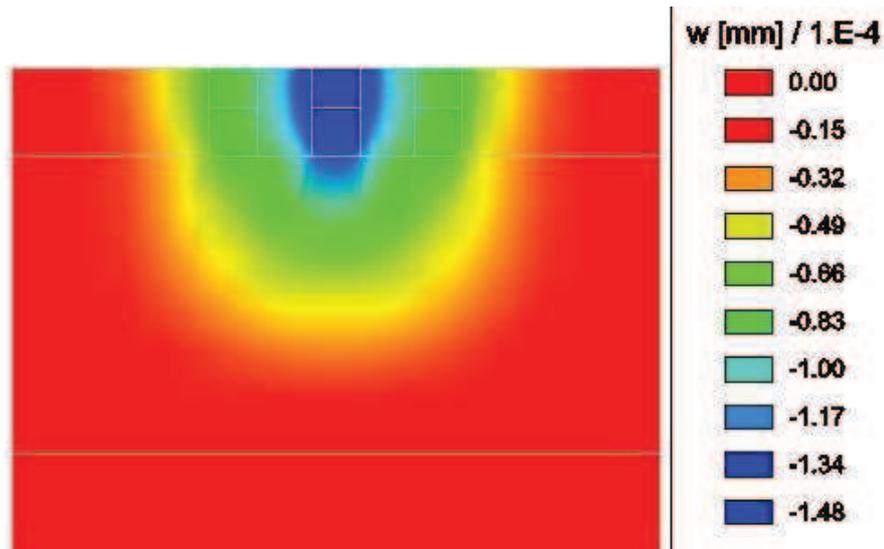


FIG. 9.23 – Dispersion du déplacement vertical pour la coupe transversale dans le cas 1-3-1 correspondant à la répartition de la charge de  $1N$  sur les trois blochets

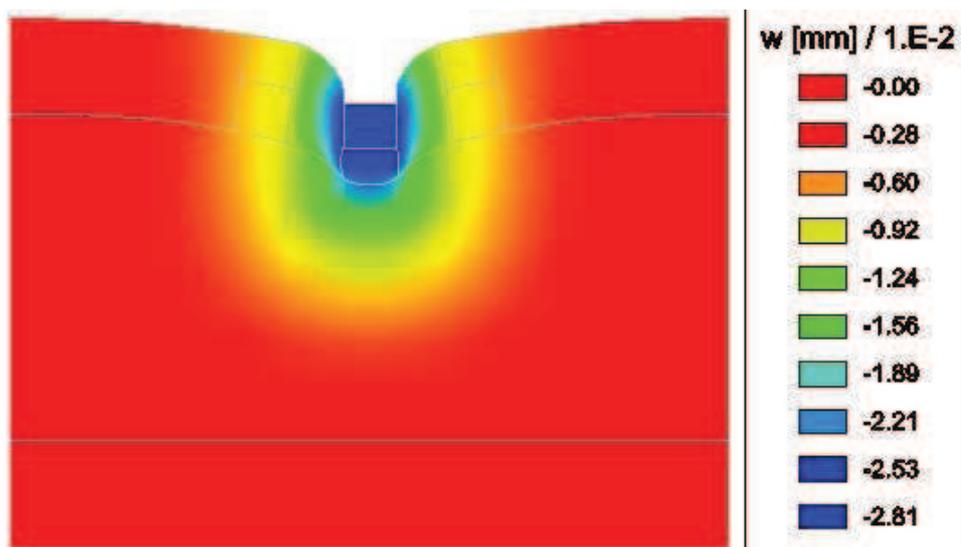


FIG. 9.24 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec un chargement vertical immobile variable à  $160km/h$

Ces indications qualitatives permettent de vérifier que la phénoménologie des modèles respecte les observations physiques. Pour aller plus loin dans l'analyse, considérons les résultats des simulations numériques sur les trois cas : mesures, cas linéaire par morceaux, et cas VNLU (non linéaire). Les observables de ces résultats sont d'une part les accélérations (fig. 9.30, 9.31, 9.32), et d'autre part les déplacements verticaux (fig. 9.27, 9.28, 9.29) pour les trois vitesses (160, 320 et 400 km/h).

On s'aperçoit, sur les figures des accélérations et des déplacements aux différentes vitesses, que les résultats des simulations numériques demeurent proches des mesures. Pour montrer cela, on utilise un tableau récapitulant les valeurs maximales des déplacements et accélérations aux différentes vitesses (tab. (9.7)).

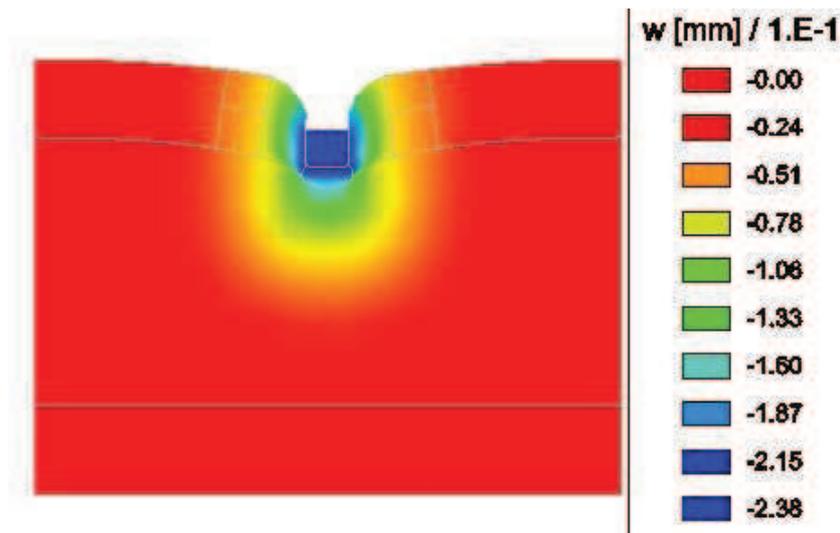


FIG. 9.25 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec un chargement vertical immobile variable à 320 km/h

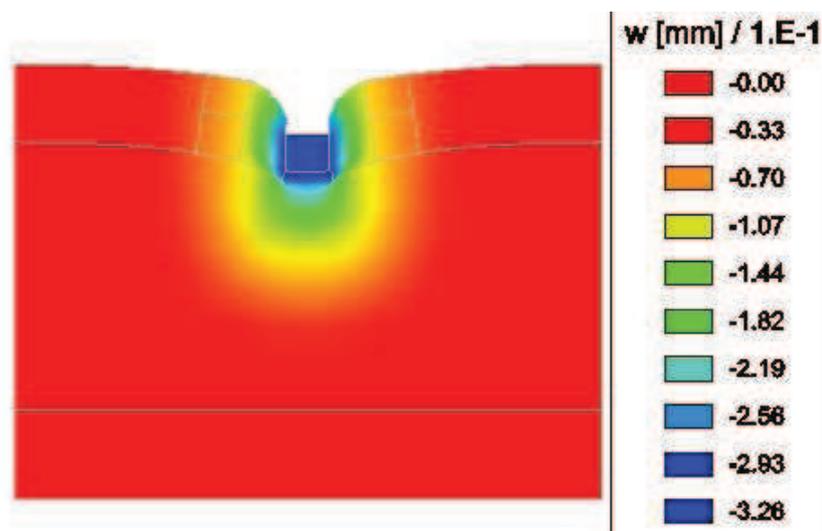


FIG. 9.26 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec un chargement vertical immobile variable à 400 km/h

Les accélérations et les déplacements verticaux s'accroissent avec la vitesse de la charge. Sauf pour l'accélération vers le bas à 320 km/h, le modèle LC est plus proche des mesures que le modèle VNLU. En outre, les écarts demeurent inférieurs à 25%. Le cas VNLU est distant de 25 à 45% des mesures.

**Remarque :** Le calage pour le sous-sol s'effectue à 65 MPa pour la coupe transversale, alors que cette valeur est de 130 MPa pour la coupe longitudinale. Cela revient à dire que la coupe transversale est un modèle plus rigide que la coupe longitudinale. C'est à mettre en parallèle avec la proportion de grains peu rigides beaucoup plus importante dans la coupe longitudinale que dans la coupe transversale.

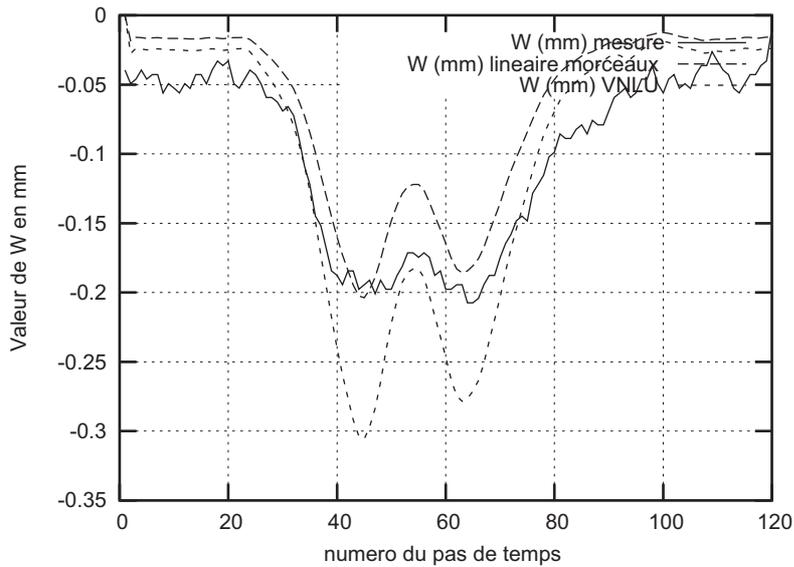


FIG. 9.27 – Déplacements verticaux pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 160km/h

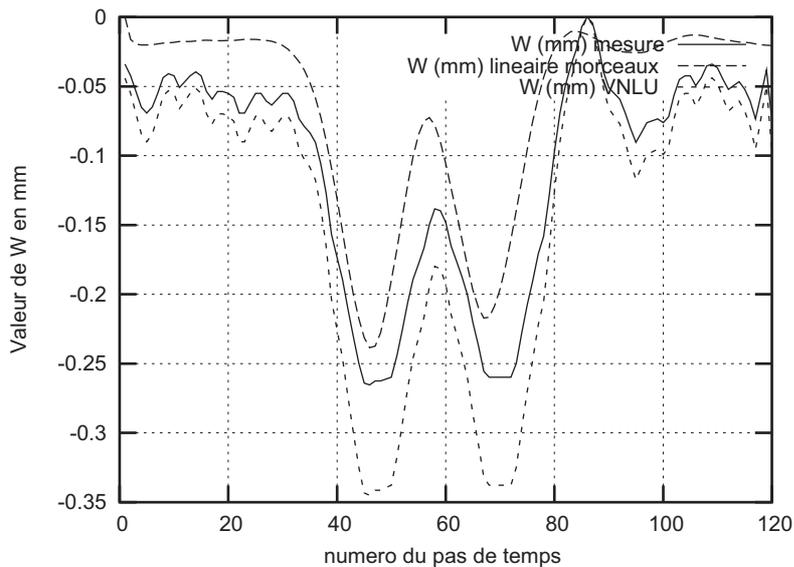


FIG. 9.28 – Déplacements verticaux pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 320km/h

#### 9.4.4 Coupe longitudinale avec un chargement mobile variable sur les trois traverses

Après avoir calé le modèle de la coupe longitudinale avec des vibrations sur la traverse centrale pour 160km/h, l'objectif de cette section est de voir l'influence de la propagation de la charge sur les trois traverses du banc d'essais à échelle un tiers pour des vitesses de roulement de 160, 320 et 400km/h.

La répartition par isovalues de déplacement vertical confirme une action préférentiellement

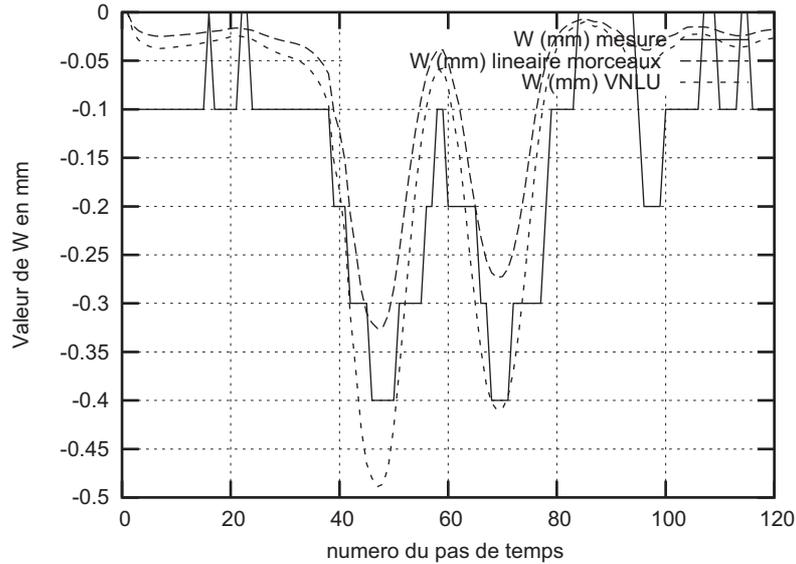


FIG. 9.29 – Déplacements verticaux pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 400km/h

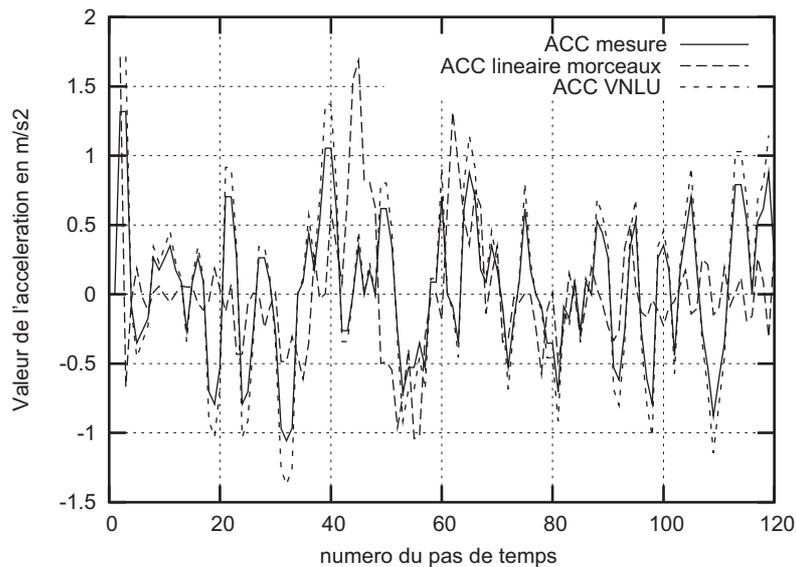


FIG. 9.30 – Accélérations verticales pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 160km/h

verticale par cette modélisation (fig. 9.33, 9.34 et 9.35).

Ces indications qualitatives permettent de vérifier que la phénoménologie des modèles respecte les observations physiques. Pour aller plus loin dans l'analyse, considérons les résultats des simulations numériques sur les trois cas : mesures, cas linéaire par morceaux, et cas VNLU (non linéaire). Les observables de ces résultats sont d'une part les accélérations (fig. 9.39, 9.40, 9.41), et d'autre part les déplacements verticaux (fig. 9.36, 9.37, 9.38) pour les trois vitesses (160, 320 et 400 km/h).

On s'aperçoit, sur les figures des accélérations et des déplacements aux différentes vitesses,

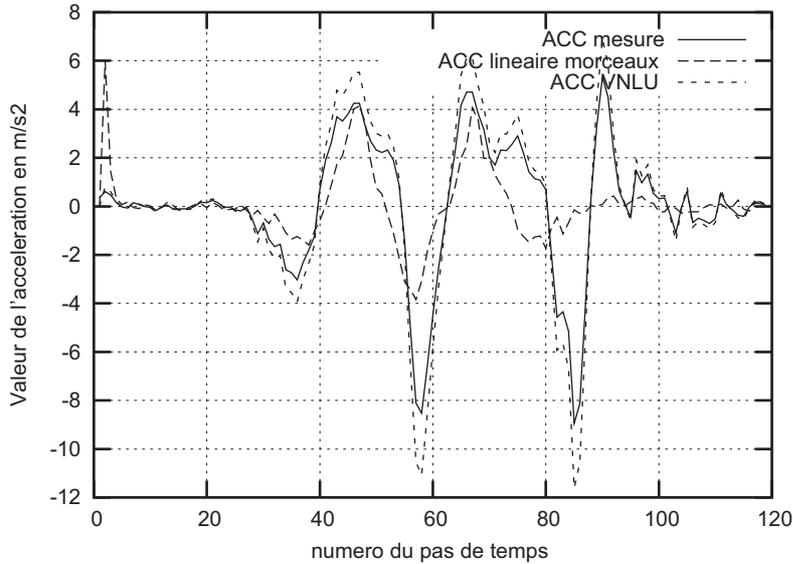


FIG. 9.31 – Accélérations verticales pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 320km/h

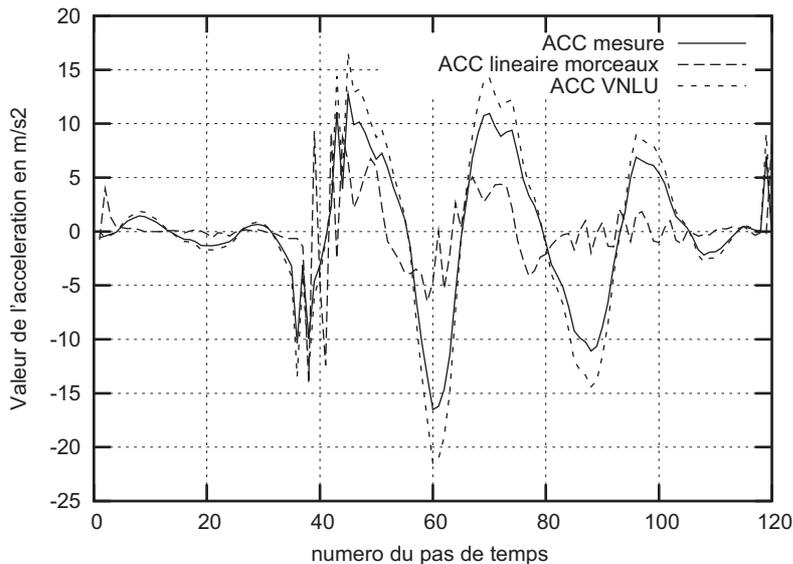


FIG. 9.32 – Accélérations verticales pour un chargement sur la traverse centrale avec une sollicitation de 400km/h

que les résultats des simulations numériques demeurent proches des mesures. Pour montrer cela, on utilise un tableau récapitulatif des valeurs maximales des déplacements et accélérations aux différentes vitesses (tab.(9.8)).

Les accélérations et les déplacements verticaux s'accroissent avec la vitesse de la charge, comme pour les précédents cas. A l'aide du tableau (tab.(9.8)), on peut dire que le modèle LC selon une coupe longitudinale suffit pour prédire le comportement du banc d'essai à échelle un tiers. La loi de comportement (pour le ballast) VNLU ne semble pas adaptée pour la géométrie ferroviaire testée dans le banc.

TAB. 9.7 – Tableau des écarts entre les mesures expérimentales et numériques (linéaire et VNLU) à 160km/h, 320km/h et 400km/h pour l'accélération maximale vers le bas  $a_b$ , l'accélération maximale vers le haut  $a_h$ , le déplacement maximal vers le bas  $\delta_b$ , les écarts entre la solution expérimentale et la solution numérique pour les accélérations vers le haut ( $ee_{ah} = \frac{a_{num} - a_{exp}}{a_{exp}}$ ), vers le bas ( $ee_{ab}$ ) et pour le déplacement vertical vers le bas ( $ee_d$ )

Modèles	$a_h$ (en $m.s^{-2}$ )	$a_b$ (en $m.s^{-2}$ )	$\delta_b$ (en $mm$ )	$ee_{ah}$ (en %)	$ee_{ab}$ (en %)	$ee_d$ (en %)
Mesures(160)	1.3	1	0.2	0	0	0
LC(160)	1.3	1	0.2	0	0	0
VNLU(160)	1.7	1.4	0.3	30	40	50
Mesures(320)	4.5	8.6	0.24	0	0	0
LC(320)	4.1	4	0.26	9	53	9
VNLU(320)	6.0	11.2	0.35	33	35	45
Mesures(400)	12	16	0.4	0	0	0
LC(400)	10	12	0.32	16	25	20
VNLU(400)	15	20	0.5	25	25	26

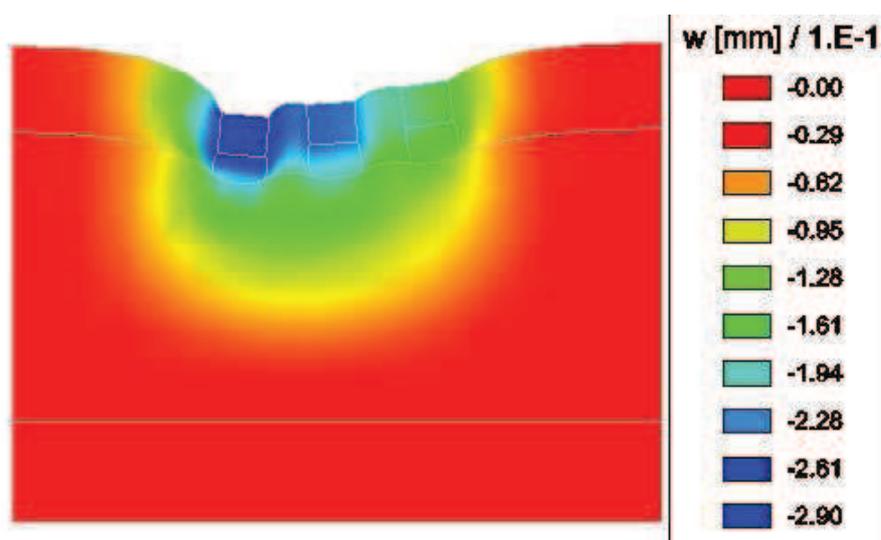


FIG. 9.33 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec une charge mobile sur trois traverses à 160km/h

### 9.4.5 Conclusion partielle

Dans cette section concernant les applications ferroviaires, on a testé d'une part différentes lois de comportement (discrètes, continues) en utilisant la méthodologie des éléments finis; et d'autre part des configurations de structures adaptées à la modélisation du banc d'essais à échelle un tiers. Finalement, les modèles introduits dans le chapitre théorique ne se sont pas révélés aussi performants autant qu'on aurait pu s'y attendre. En revanche, les modèles de tranches longitudinale et transversale couplés avec des lois linéaires permettent de donner des valeurs suffisamment satisfaisantes pour se poser la question d'une généralisation sur des portions de voie réelles.

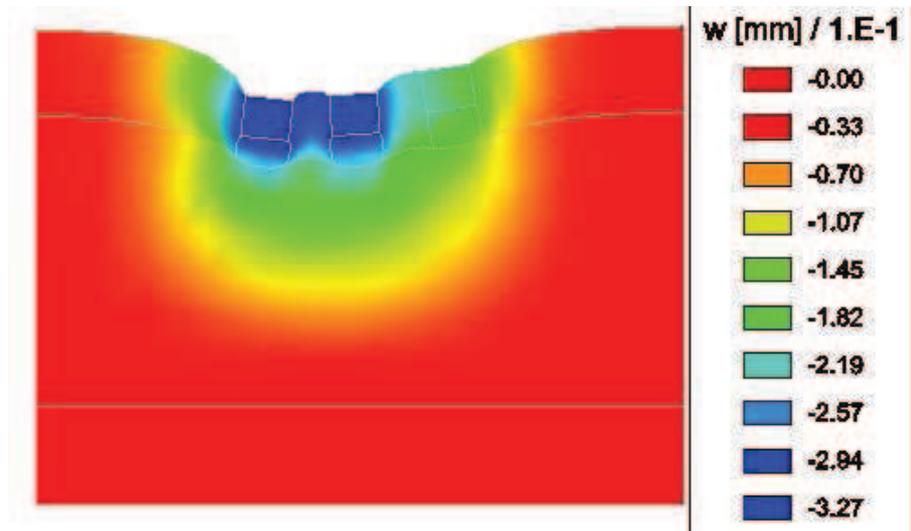


FIG. 9.34 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec une charge mobile sur trois traverses à 320km/h

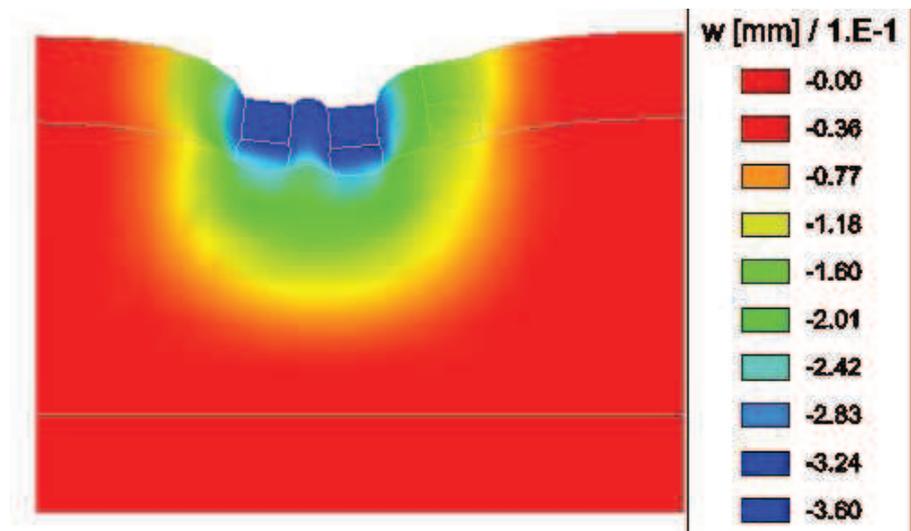


FIG. 9.35 – Isovaleurs du déplacement vertical pour une coupe longitudinale avec une charge mobile sur trois traverses à 400km/h

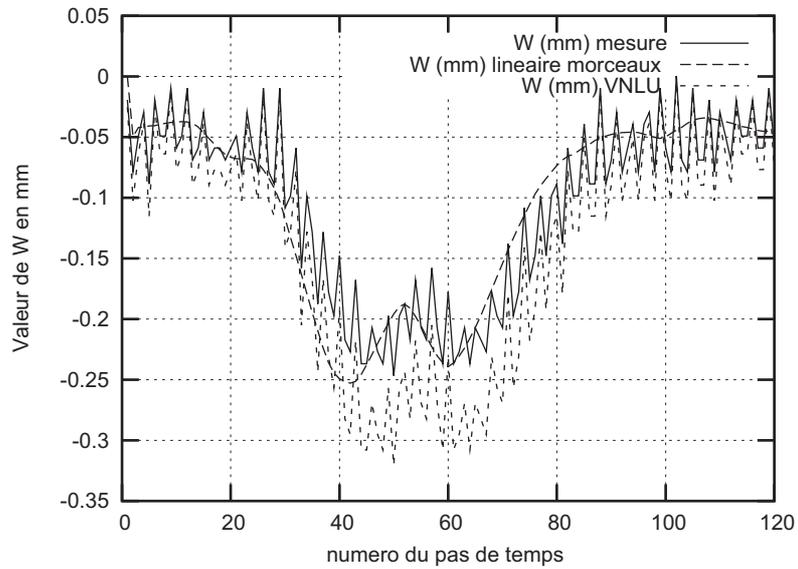


FIG. 9.36 – Déplacements verticaux pour une charge mobile sur trois traverses à 160km/h

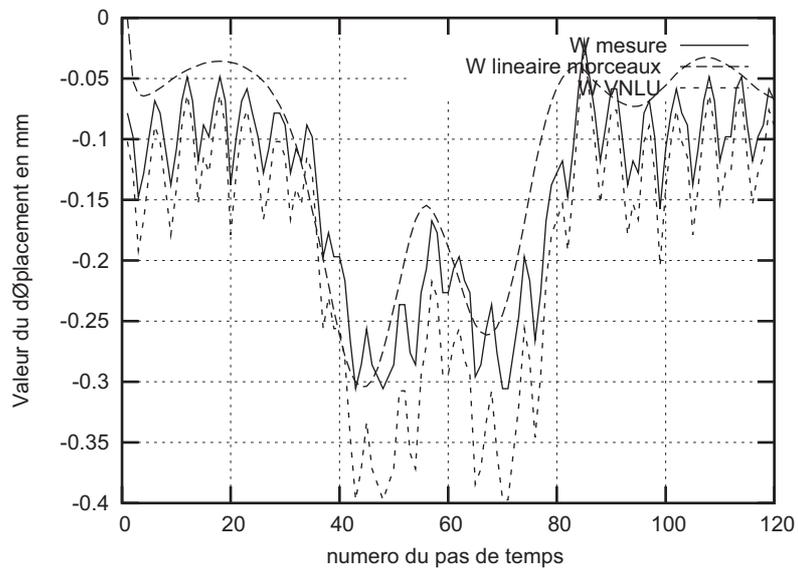


FIG. 9.37 – Déplacements verticaux pour un chargement sur une charge mobile sur trois traverses à 320km/h

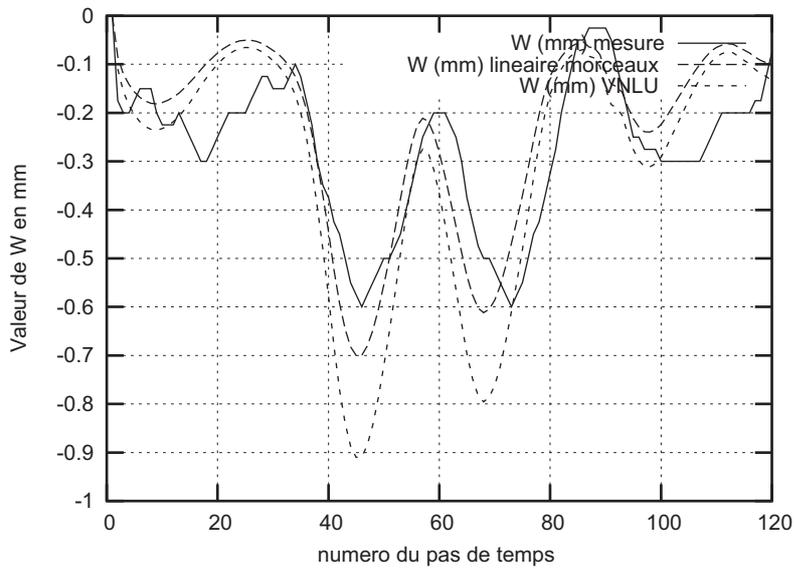


FIG. 9.38 – Déplacements verticaux pour un chargement sur une charge mobile sur trois traverses à 400km/h

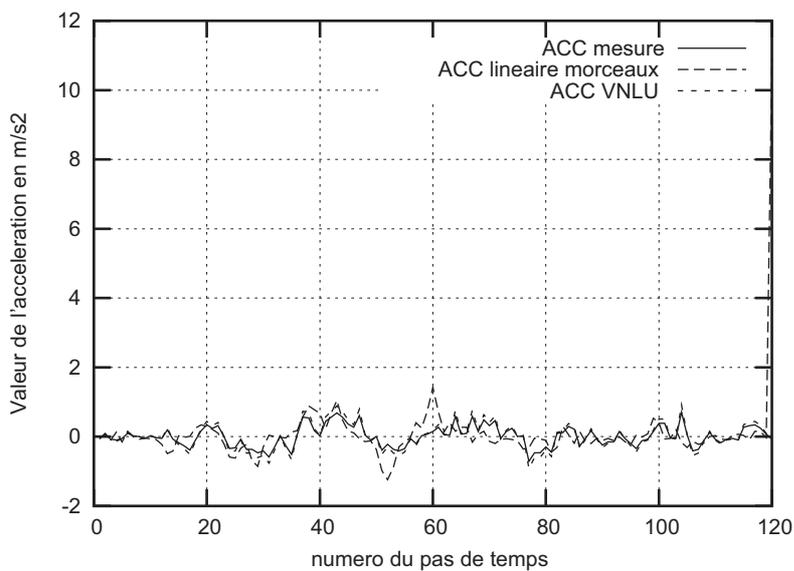


FIG. 9.39 – Accélérations verticales pour une charge mobile sur trois traverses à 160km/h

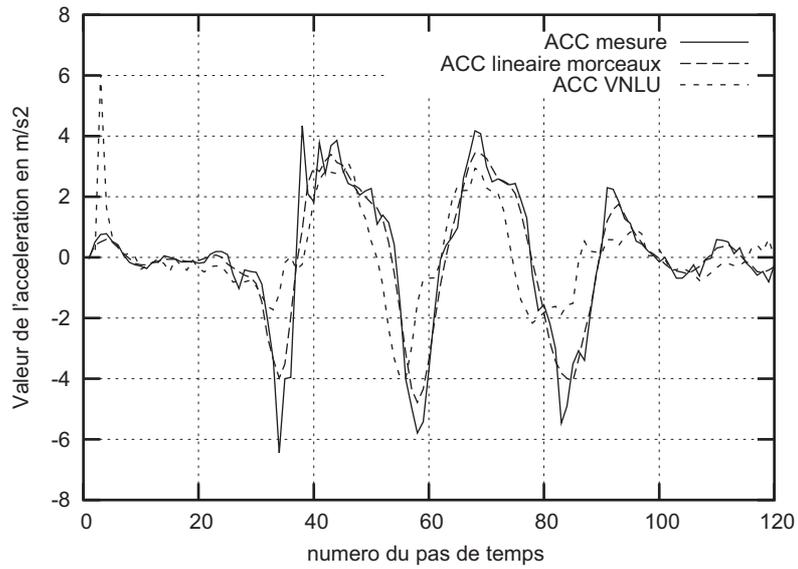


FIG. 9.40 – Accélérations verticales pour une charge mobile sur trois traverses à 320km/h

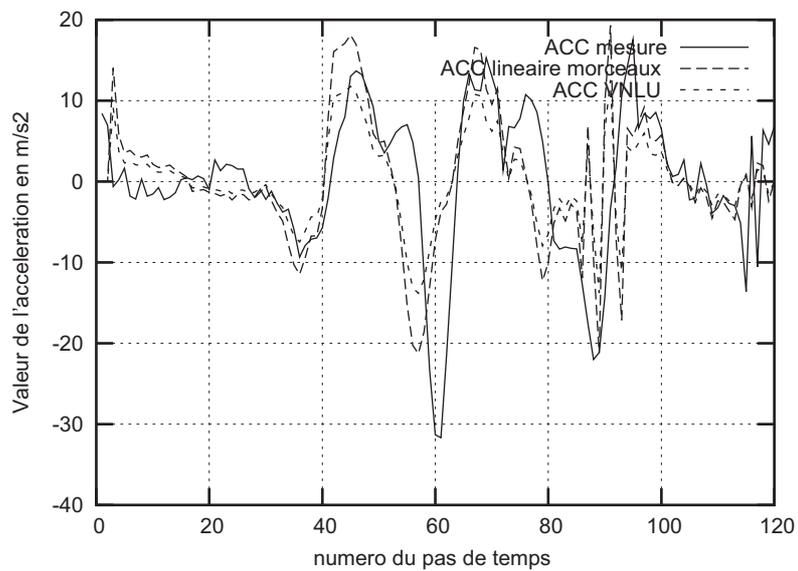


FIG. 9.41 – Accélérations verticales pour une charge mobile sur trois traverses à 400km/h

TAB. 9.8 – Tableau des écarts entre les mesures expérimentales et numériques (linéaire et VNLU) pour une charge mobile sur trois traverses à 160km/h, 320km/h et 400km/h pour l'accélération maximale vers le bas  $a_b$ , l'accélération maximale vers le haut  $a_h$ , le déplacement maximal vers le bas  $\delta_b$ , les écarts entre la solution expérimentale et la solution numérique pour les accélérations vers le haut ( $ee_{ah} = \frac{a_{num} - a_{exp}}{a_{exp}}$ ), vers le bas ( $ee_{ab}$ ) et pour le déplacement vertical vers le bas ( $ee_d$ )

Modèles	$a_h$ (en $m.s^{-2}$ )	$a_b$ (en $m.s^{-2}$ )	$\delta_b$ (en $mm$ )	$ee_{ah}$ (en %)	$ee_{ab}$ (en %)	$ee_d$ (en %)
Mesures(160)	1	1	0.23	0	0	0
LC(160)	1	1	0.25	0	0	9
VNLU(160)	1.7	1.2	0.3	70	20	30
Mesures(320)	4	6	0.3	0	0	0
LC(320)	3.6	4	0.3	10	33	0
VNLU(320)	2.8	5	0.4	30	17	33
Mesures(400)	13	30	0.6	0	0	0
LC(400)	11	20	0.7	15	33	17
VNLU(400)	18	12	0.9	38	60	50

# Chapitre 10

## Conclusion générale et éléments de perspectives

Suite au constat d'une dégradation des lignes à grande vitesse (LGV) plus rapide que prévu par une démarche empirique, des études ont été initiées par la SNCF afin de comprendre les phénomènes mis en jeu, ainsi que pour optimiser la maintenance. Le LCPC, sur le plan expérimental et de la modélisation de cette structure ballastées demeure l'un des ses partenaires historiques.

C'est donc en collaboration entre la SNCF et le LCPC que s'est déroulée notre travail. Pour évaluer le niveau de désordre et de tassement dans le ballast, l'accélération dans ledit ballast est apparue comme le paramètre capital. La démarche a été la suivante : à l'aide d'un bogie simulé par un signal de la forme d'un M dans trois vérins, on a d'abord évalué expérimentalement pour différentes vitesses le tassement en fonction de l'accélération et de la nature du sol. Ensuite, une fois ces lois déterminées, on a cherché à trouver numériquement l'accélération dans le ballast en fonction de la sollicitation du bogie. En somme, l'objectif est de trouver numériquement l'accélération en fonction de la nature du sol de même que des caractéristiques de la sollicitation d'un TGV ; puis, grâce aux lois expérimentales, de qualifier le tassement qui en résulte.

Si on avait voulu un modèle purement numérique, l'approche aurait été très longue, car un tassement d'un millimètre se produit au bout d'un million de cycles, c'est à dire au bout du passage d'un million de bogies. L'intérêt de cette démarche mixte est de combiner le coût (faible) des simulations numériques pour le court terme (modèle élastique), et des lois expérimentales qui permettent d'appréhender le long terme en décrivant des phénomènes irréversibles.

La construction de modèles semi-analytiques 1D et 3D avec des approches linéaires bi-couches aisément généralisables à des multicouches, nous a permis de retrouver ce que le bon sens nous suggérait :

- plus la vitesse augmente, plus les déplacements et les accélérations sont forts ;
- les déplacements et les accélérations sont d'autant plus élevés que la rigidité du sol (ballast ou plateforme) diminue ;
- la densité de grains dans une hauteur déterminée influence le comportement. Si la densité devient faible, l'amas granulaire se comportera de manière plus discrète (ie : il existe des différences entre les résultats des modèles discret/continu et continu/continu), alors que si la densité de grains s'accroît, l'amas granulaire se comporte comme un milieu continu.

Ces modèles semi-analytiques sont relativement simples et rapides, mais elles ne peuvent pas s'adapter à des structures complexes ni à des comportements non-linéaires (pour le ballast).

C'est pourquoi la méthode des éléments finis, méthode souple et adaptable pour la prise en compte de la géométrie et des lois de comportement, a été utilisée.

On a construit pour cela des approches avec des lois de comportement locales (qualifiées de discrètes), qu'elles soient linéaires, non-linéaires, ou unilatérales. On a employé aussi des modèles continus unilatéraux sans tension développés par V.H.Nguyen[53].

On a constaté que les approches les plus sophistiquées ne sont pas forcément à recommander, surtout si on s'intéresse, comme ce fut le cas dans notre travail, au déplacement et à l'accélération. En plus, elles s'éloignent parfois des mesures sur le banc BESTT de manière très importante. La bonne modélisation, même à des vitesses élevées est de considérer le ballast comme un bimatériau, dont la rigidité était importante sous les traverses (avec des descentes de charges verticales), et faible en-dehors des traverses.

Les perspectives passent notamment par la connaissance plus fine des événements dans le ballast. En effet nous n'avons pas interprété pourquoi le tassement s'accélère très fortement à partir d'une certaine vitesse. Les réorganisations deviennent très importantes. Par analogie avec la mécanique des fluides, on peut imaginer que des zones de liquéfaction se produisent de manière aléatoire, et ce, de plus en plus avec l'accroissement de la vitesse du TGV. Ces bulles de liquéfaction (avec une rigidité forcément plus faible) augmenteraient de volume avec la vitesse.

Le deuxième point concerne l'étude des configurations spéciales de la voie ferrée : ce seront les études dans les virages, de même que les études des transitions dur/mou (passage d'un sol "normal" à la plateforme d'un pont...). Des surcharges de contraintes se produisent au voisinage de la transition, expliquant probablement les désordres près de la transition.

Enfin, il faudra vérifier que les lois expérimentales déterminées par le LAMI[4] sur un banc d'essai à échelle réduite (un tiers) demeurent vraies lorsque l'échelle se rapproche de l'échelle réelle. Des expérimentations au LCPC vont être commencées pour le vérifier.

# Bibliographie

- [1] S.Adhikari, "*Damping models for structural vibration*", PhD thesis, Trinity College, Cambridge, 2000.
- [2] A.Alaoui and T.Naciri, "*Les voies ballastées*", CERAM-SNCF report, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [3] J.Alias, "*La voie ferrée-Techniques de construction et d'entretien*", Eyrolles, Paris, 1984.
- [4] A.Al Shaer, D.Duhamel, K.Sab, V.H.Nguyen, G.Forêt, E.Merliot, et L.Schmitt, "*Dimensionnement dynamique d'un banc d'essai de voie ferrée à échelle réduite par la méthode des éléments finis (CESAR-LCPC)*", Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées, vol. 3, numéro 256-257, P ????, Paris, 2005.
- [5] A.Al Shaer, "*Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées : approche dynamique*", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Champs Sur Marne, 2005.
- [6] N.W.Ashcroft et N.D.Mermin, "*Physique des solides*", EDP Sciences, Les Ulis, 2002, ISBN : 2-86883-577-5.
- [7] L.Andersen, S.R.K.Nielsen, P.H.Kirkegaard "*Finite element modelling of infinite euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates*", Journal of Sound and Vibration, vol. 241 (4), p.587-604, 2001.
- [8] D.Aubry, D.Clouteau, et A.Modaresi, "*Calcul tridimensionnel en géotechnique, Interaction dynamique sol-structure*", Presses des Ponts et Chaussées, Paris, 1998.
- [9] M.Balsan et B.Portier, "*Essai de Vienne-Arsenal. Application de la méthode des éléments finis au dimensionnement des structures d'assises de voies ferrées*", Mémoire de fin d'études d'ingénieur, Paris, 1976-1977.
- [10] F.C.P. de Barros and J.E.Luco, "*Response of a layered viscoelastic halfspace for a moving line load.*", Wave Motion, vol 19, 189-210, 1994.
- [11] F.C.P. de Barros and J.E.Luco, "*Stresses and displacement in a layered halfspace for a moving line load.*", Appl. Math. & Comp., vol 67, 103-134, 1995.
- [12] P.M.Belotserkovskiy, "*On the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force*" Journal of Sound and Vibration, vol 193 (3), p.705-712, 1996.
- [13] C.Bode, "*Soil-structure interaction in the time domain using halfspace Green's functions*", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol 22, p.283-295, 2002.
- [14] V.Bodin, "*Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral*", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [15] M.Bonnet, "*Equations intégrales et éléments de frontière en mécanique du solide*", Cours de l'Ecole Polytechnique, 1994.
- [16] L.Brillouin, "*Propagation des ondes dans les milieux périodiques*", Masson, Paris, 1956. (in french)
- [17] M.Brough, A.Stirling, G.Ghataora, et K.Madelin, "*Evaluation of railway trackbed and formation : a case study*", NDT&E international, vol 36, p.145-156, 2003.

- [18] P.Brousse, "*Mécanique analytique*", Vuibert Université, Paris, 1981, ISBN 2-7117-2205-8.
- [19] C.S.Chang et J.Gao, "*Non-linear dispersion of plane wave in granular media*", International Journal of Non-Linear Mechanics, vol.30 (2), p.111-128, 1995.
- [20] Y.H.Chen and Y.H.Huang, "*Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate*", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.48, p.1-18, 2000.
- [21] M.Clark, "*Infrared thermographic investigation of railway track ballast*", NDT&E international, vol 35, p.83-94, 2002.
- [22] M.Clark, "*Electromagnetic properties of railway ballast*", NDT&E international, vol 34, p.305-311, 2001.
- [23] R.B.Clelland, "*Simulation of granular and fluid systems using combined continuous and discrete methods*", PhD thesis, Duke University, 1996.
- [24] D.Clouteau, "*Modélisation des vibrations induites par le trafic routier et ferroviaire*", Actes du 6ème colloque national de calcul des structures, ???, 2001.
- [25] P.A.Cundall, "*A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems*", Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics, Nancy, France, vol 1, p.132-150, 1971.
- [26] G.Dhatt, G.Touzot, "*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Maloine S.A. Editeur, Collection Université de Compiègne, 1987.
- [27] T.Ekevid et N.E.Wiberg, "*Wave propagation related to high-speed train. A scaled boundary FE-approach for unbounded domains*", Computer methods in applied mechanics and engineering, vol 191, p.3947-3964, 2002.
- [28] T.Ekevid et N.E.Wiberg, "*Adaptative FEA of wave propagation induced by high-speed trains*", Computers and Structures, vol 79, p.2693-2704, 2001.
- [29] T.Ekevid and N.-E.Wiberg, "*On wave propagations problems associated to high speed trains.*", Proceedings of the European conference on computational mechanics, Cracow, Poland, 2001.
- [30] A.Frid, "*A quick and practical experimental method for separating wheel and track contributions to rolling noise*" Journal of Sound and Vibration, p.619-629, vol 231(3), 2000.
- [31] L.Fryba, "*Vibration of solids and structures under moving loads*", Thomas Telford, 3rd edition, 1999.
- [32] M.C.Genes et S.Kocak, "*A combined finite element based soil-structure interaction model for large-scale systems and applications on parallel platforms*", Engineering Structures, vol 24, p.1119-1131, 2002.
- [33] N.Guérin, "*Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées*", PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [34] J.F.Hamet, "*Railway noise : Use of Timoshenko model in rail vibration studies*", Acta acustica, vol 85, p.54-62, 1999.
- [35] M.Harris , E.Crede, "*Shock and vibration handbook*", McGraw-Hill, New York, 1961.
- [36] M.A.Heckl, "*Coupled waves on a periodically supported Timoshenko beam*", Journal of Sound and Vibration, vol 252(5), p.849-882, 2002.
- [37] R.N.HWANG, J.LYSMER, E.BERGER, "*A simplified three dimensional soil-structure interaction study*", Proceedings of the 2nd ASCE specialty conference on structural design of nuclear plant facilities 1975.
- [38] D.Indraratna et W.Salim, "*Deformation and degradation mechanics of recycled ballast stabilised with geosynthetics*", Soils and Foundations, vol 43 (4), p.35-46, 2003.
- [39] M.Jean, "*Documentaion sur le LMGC (Logiciel Mécanique pour Gérer les Contacts)*",

- Rapport de recherche, université de Montpellier II, 1995.
- [40] J.Jedrysiak, “*Free vibrations of thin periodic plates interacting with an elastic periodic foundation*” International Journal of Mechanical Sciences, vol 45, p.1411-1428, 2003.
- [41] P.Kettil,T.Ekevid et N.E.Wiberg, “*Towards fully mesh adaptative FE-simulations in 3D using multi-grid solver*”, Computers and Structures, vol 81, p.735-746, 2003.
- [42] K.L.Knothe et Y.Wu, “*Receptance behaviour of railway track and subgrade*”, Archive of Applied Mechanics, vol 68, p.457-470, 1998.
- [43] K.L.Knothe et S.L.Grassie, “*Modelling of Railway Track and Vehicle/Track Interaction at High Frequencies*”, Vehicle System Dynamics, vol 22, p.209-262, 1993.
- [44] Z.Krakutovski, “*Etude de la dégradation géométrique des voies ferrées*”, Mémoire de DEA, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000.
- [45] G.Lefeuvre-Mesgouez, “*Propagation d’ondes dans un massif soumis à des charges se déplaçant à une vitesse constante*”, PhD thesis, Ecole Centrale Nantes, 1999.
- [46] N.-H.Lim, N.H.Park, et Y.J.Kang, “*Stability of continuous welded rail track*”, Computers and Structures, vol 81, p.2219-2236, 2003.
- [47] F.Maddalena and M.Ferrari, “*Viscoelasticity of granular materials*”, Mechanics of materials, vol 20, p.241-250, 1995.
- [48] C.Miehe et J.Dettmar, “*A framework for micro-macro transitions in periodic particle aggregates of granular materials*” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 193, p.225-256, 2004.
- [49] J.J.Moreau, “*Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials*” European Journal of Mechanics A/Solids, vol 13, p.93-114,1986.
- [50] P.Museros, M.L.Romero, A.Poy, et E.Alarcon, “*Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines*”, Computers and Structures, vol 80, p.2121-2132, 2002.
- [51] A.Nashif,D.Jones, and J.Henderson, “*Vibration damping*”, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons Inc., 1985, ISBN : 0-471-86772-1.
- [52] J.C.O.Nielsen, “*Acoustic optimization of railway sleepers*”, Journal of Sound and Vibration, vol 231(3), p.753-764, 2000.
- [53] V.H.Nguyen, D.Duhamel, B.Nedjar, “*A continuum model for granular materials taking into account the no-tension effect*”, Mechanics of materials, vol35, p.955-967, 2003.
- [54] V.H.Nguyen, “*Analyse de voies ferrées en dynamique non-linéaire par la méthode des éléments finis*”, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport final de post-doctorat, Paris, 2003.
- [55] V.H.Nguyen, “*Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles.*”, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [56] V.H.Nguyen, D.Duhamel, B.Nedjar, “*Calcul de structures soumises à une charge mobile par la méthode des éléments finis*”, XVIème Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3-7 septembre 2001.
- [57] J.-P.Orsi, “*La rénovation de la ligne à grande vitesse Paris Sud-Est*”, Revue Générale des Chemins de Fer, p.5-14, décembre 1999.
- [58] R.Ogden, “*Non linear elastic deformation*”, Ellis Horwood Edition, 1984.
- [59] X.Oviedo-Marlot, “*Etude du comportement du ballast par un modèle micromécanique (application à la maintenance de la voie ferrée ballastée)*”, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [60] A.Pecker, “*Dynamique des sols*”, Presses des Ponts et Chaussées, Paris, 1984.
- [61] B.Picoux, R.Rotinat, J.P.Regoin, et D. Le Houedec, “*Prediction and measurements of vibrations from a railway track lying on a peaty ground*”, Journal of Sound and Vibration,

- vol 267, p.575-589, 2003.
- [62] F.Pradel, "*Homogénéisation des milieux continus et discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*", PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- [63] V.Profillidis, "*La voie ferrée et sa fondation*", PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [64] A.Prud'homme, "*Les problèmes que posent pour la voie, la circulation des rames à grande vitesse*", Revue Generale des Chemins de Fer, p.695-704, 1976.
- [65] G.P.Raymond, "*Reinforced ballast behaviour subjected to repeated load*", Geotextiles and Geomembranes, vol 20, p.39-61, 2002.
- [66] L.Ricci, V.H.Nguyen, K.Sab, D.Duhamel, et L.Schmitt, "*Dynamic behaviour of ballasted railway tracks : a discrete/continuous approach*", Computers and Structures, vol 83, p.2282-2292, nov. 2005.
- [67] L.Ricci, V.H.Nguyen, K.Sab, D.Duhamel, et L.Schmitt, "*Dynamic behaviour of ballasted railway tracks : a discrete/continuous approach*", Civil-Comp Press, B.H.V.Topping, Stirling, Scotland, Proceedings of the Ninth International Conference on Civil and Structural Engineering Computing, Egmond aan Zee, sept. 2003.
- [68] J.R.Rieker, Y.H.Lin, M.W.Trethewey, "*Discretisation consideration in moving load finite element beam model*", Finite Element in Analysis and Design, vol. 21, p.129-144, 1996.
- [69] G.Saussine, "*Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast*", Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, Montpellier, 2004.
- [70] X.Sheng, C.J.C.Jones, et M.Petyt, "*Ground vibration generated by a load moving along a railway track*", Journal of Sound and Vibration, vol 228(1), p.129-156, 1999.
- [71] M.J.Shenton, "*Deformation of railway ballast under repeated loading conditions*", Railroad track mechanics and technology, Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [72] C.Song et J.P.Wolf, "*Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method*" Computers and Structures, vol 80, p.183-197, 2002.
- [73] C.Song et J.P.Wolf, "*The scaled boundary finite-element method - a primer : solution procedures*" Computers and Structures, vol 78, p.211-235, 2000.
- [74] C.Song et J.P.Wolf, "*The scaled boundary finite-element method - a primer : derivations*" Computers and Structures, vol 78, p.191-210, 2000.
- [75] C.Song et J.P.Wolf, "*Body loads in scaled boundary finite-element method*" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 180, p.117-135, 1999.
- [76] C.Song et J.P.Wolf, "*The scaled boundary finite-element method : analytical solution in frequency domain*" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 164, p.249-264, 1998.
- [77] C.Song et J.P.Wolf, "*The scaled boundary finite-element method - alias consistent infinitesimal finite-element cell method - for elastodynamics*" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 147, p.329-355.
- [78] A.S.J.Suiker, A.V.Metrikine et R. De Borst, "*Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model corresponding discrete lattice models*" International Journal of Solids and Structures, vol 38, p.1563-1583, 2001.
- [79] A.S.J.Suiker, A.V.Metrikine et R. De Borst, "*Dynamic behaviour of a layer of discrete particles. Part 1 : analysis of body waves and eigenmodes*", Journal of Sound and Vibration, vol 240, p. 1-18, 2001.
- [80] A.S.J.Suiker, A.V.Metrikine et R. De Borst, "*Dynamic behaviour of a layer of discrete particles. Part 2 : response to a uniformly moving, harmonically vibrating load*", Journal of Sound and Vibration, vol 240, p. 19-39, 2001.

- [81] A.S.J.Suiker, C.S.Chang, R. De Borst et C.Esveld, “*Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties, part 1 : Formulation of the boundary value problem.*”, Eur.J.Mech.A/Solids, vol 18, p. 749-768, 1999.
- [82] A.S.J.Suiker, C.S.Chang, R. De Borst et C.Esveld, “*Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties, part 2 : Analysis of the wave characteristics in regard to high-speed railway tracks*”, Eur.J.Mech.A/Solids, vol 18, p. 769-784, 1999.
- [83] Y.Q.Sun et M.Dhanasekar, “*A dynamic model for the vertical interaction of rail track and wagon system*”, International Journal of Solids and Structure, vol 39, p.1337-1359, 2002.
- [84] A.E.Vardy et J.M.B.Brown, “*Influence of ballast on wave steepening in tunnels*”, Journal of Sound and Vibration, vol 238(4), p.595-615, 2000.
- [85] C.R.Wassgren, “*Vibration of granular materials*”, PhD Thesis, Purdue University, 1997.
- [86] J.P.Wolf et C.Song, “*Some cornerstones of dynamic soil-structure interaction*” Engineering Structures, vol 24, p.13-28, 2002.
- [87] J.P.Wolf et C.Song, “*The scaled boundary finite-element method - a fundamental solution - less boundary - element method*” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 190, p.5551-5568, 2001.
- [88] J.P.Wolf et C.Song, “*Unit-impulse response of unbounded medium by scaled boundary finite-element method*” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 159, p.355-367, 1998.
- [89] T.X.Wu et D.J.Thomson, “*The effects of local preload on the foundation stiffness and vertical vibration of railway track*”, Journal of Sound and Vibration, vol 219 (5), p.881-904, 1999.
- [90] J.-D.Yau, Y.B.Yang, et S.R.Kuo, “*Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars*” Engineering Structures, vol 21, p.836-844, 1999.
- [91] M.Zagyapan et C.A.Fairfield, “*Continuous surface wave and impact methods of measuring the stiffness and density of railway ballast*” NDT&E international, vol 35, p.75-81, 2002.
- [92] W.M.Zhai, K.Y.Wang, et J.H.Lin, “*Modelling and experiment of railway ballast vibrations*”, Journal of Sound and Vibration, vol 270, p.673-683, 2004.
- [93] W.M.Zhai et Z.Cai, “*Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track*” Computers and Structures, vol 63 (5), p.987-997, 1997.
- [94] S.J.Zhu, X.T.Weng, et G.Chen, “*Modelling of the stiffness of elastic body*” Journal of Sound and Vibration, vol 262, p.1-9, 2003.
- [95] Y.Zhu, A.Shukla, et M.H.Sadd, “*The effects of microstructural fabric on dynamic load transfer in two dimensional assemblies of elliptical particles*” J.Mech.Phys. Solids, vol. 44 (8), p.1283-1303, 1996.



# Annexe A

## Résoudre une équation de degré 3

Cette annexe est utile pour comprendre la résolution semi-analytique d'un bicouche mixte discret/continu 3D.

Nous introduisons une méthode pour résoudre une équation de degré 3 de la forme suivante :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0 \quad (\text{A-1})$$

1. On divise par a, et on pose :

$$x = y - \frac{b}{3a} \quad (\text{A-2})$$

2. On obtient une équation de la forme suivante :

$$y^3 + py + q = 0 \quad (\text{A-3})$$

avec :

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad (\text{A-4})$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} \quad (\text{A-5})$$

3. Si on pose :

$$y = z - \frac{p}{3z} \quad (\text{A-6})$$

et si on multiplie par  $z^3$ , on obtient :

$$z^6 + ez^3 + f = 0 \quad (\text{A-7})$$

avec :

$$e = q \quad (\text{A-8})$$

$$f = \frac{-p^3}{27} \quad (\text{A-9})$$

Il s'agit d'une équation quadratique en  $z^3$  que l'on résout aisément :

$$z^3 = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 4f}}{2} = Z \quad (\text{A-10})$$

Il s'agit d'une racine troisième. Pour avoir le "z", on prend la racine cubique du module de  $z^3$ , et un tiers de l'argument à  $\frac{2\pi}{3}$  près.

Si  $\alpha$  est la partie réelle de  $Z$  et  $\beta$  sa partie imaginaire, alors :

$$z = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{6}} e^{i \frac{\arctan(\frac{\alpha}{\beta})}{3}} \quad (\text{A-11})$$

On a donc six solutions dont trois (au moins) sont identiques.

$$z = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{6}} e^{i \frac{\arctan(\frac{\alpha}{\beta})}{3}} \quad \text{si } \alpha \geq 0 \quad (\text{A-12})$$

$$z = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{6}} e^{i \frac{\arctan(\frac{\alpha}{\beta}) + \pi}{3}} \quad \text{si } \alpha \leq 0 \quad (\text{A-13})$$

# Annexe B

## Recherche des directions de propagation d'ondes

Cette annexe est utile pour comprendre le chapitre sur le cas 3D mixte discret/continu résolu par une approche semi-analytique.

Dans cette section, on va décrypter le sens du déterminant de dispersion. S'il est de dimension  $n$ , le nombre de relations entre les variables intrinsèques est de  $n$  si le déterminant est nul. Dire que le déterminant est nul signifie que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la matrice associée au déterminant est de dimension inférieure à  $n$  (strictement). Dans notre cas, la dimension de notre déterminant  $\Delta$  est de 3. Par conséquent, l'espace vectoriel engendré (noté "*vect*( vecteurs ) ") est de dimension 0, 1, ou 2. Soient  $\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3$  les trois vecteurs colonnes de cette matrice associée au déterminant de dispersion.

$$\dim(\text{vect}(\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3)) < 3 \quad (\text{B-1})$$

$$\iff \det(\Delta) = 0 \quad (\text{B-2})$$

Pour une dimension 0, on a :

$$\dim(\text{vect}(\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3)) = 0 \quad (\text{B-3})$$

$$\iff \underline{C}_1 = 0, \underline{C}_2 = 0, \text{ et } \underline{C}_3 = 0 \quad (\text{B-4})$$

Pour un espace de dimension 1, les trois vecteurs sont colinéaires :

$$\dim(\text{vect}(\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3)) = 1 \quad (\text{B-5})$$

$$\iff \text{si : } \underline{C}_1 \neq 0, \underline{C}_1 = \alpha \underline{C}_2 = \beta \underline{C}_3 \quad (\text{B-6})$$

$$\iff \text{si : } \underline{C}_1 \neq 0, \underline{C}_1 \wedge \underline{C}_2 = 0, \text{ et } \underline{C}_1 \wedge \underline{C}_3 = 0 \quad (\text{B-7})$$

Pour un espace de dimension 2, les vecteurs sont liés :

$$\dim(\text{vect}(\underline{C}_1, \underline{C}_2, \underline{C}_3)) = 2 \quad (\text{B-8})$$

$$\iff \text{soit : } \underline{C}_1 \wedge \underline{C}_2 = 0 \text{ ou } \underline{C}_1 \wedge \underline{C}_3 = 0 \text{ soit } \underline{C}_1 = \alpha \underline{C}_2 + \beta \underline{C}_3 \quad (\text{B-9})$$



# Annexe C

## Force discrète équivalente

Le problème essentiel de cette partie est de déterminer quelle force il faut exercer sur les grains de ballast pour que le modèle continu exerce cette force avec la même intensité. En fait, il s'agit de déterminer les caractéristiques de la force qui s'applique de façon discrète aux grains de ballasts en fonction de celle qui s'applique à un milieu continu équivalent de telle sorte que la charge reprise par le milieu considéré comme continu soit équivalente à celle de celui considéré comme discret.

### C.1 Cas d'une charge ponctuelle

#### C.1.1 Cas 2D

Considérons une force  $\mathbf{F}$  qui se déplacerait avec une vitesse  $\mathbf{v}$  sur un milieu granulaire comme on peut le voir sur la figure C.1. Le diamètre des grains est de  $d$ .

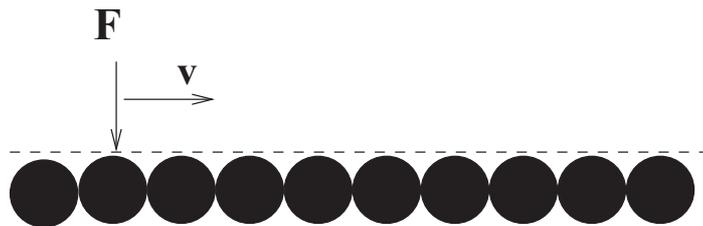


FIG. C.1 – Etude d'une charge ponctuelle dans un cas 2D

En fait ce problème se limite à l'étude de la propagation d'une force entre deux grains **1** et **2** (fig.C.2). Etant donné que l'on souhaite que la force se déplace sur une parallèle à la surface formée des sommets des grains, il faut modéliser ce qu'il se passe entre deux grains.

Lorsque la force se trouve sur le sommet d'un grain, cette dernière s'applique entièrement sur ce grain. Lorsqu'elle se trouve entre deux grains, on peut considérer qu'elle s'applique sur les deux grains en fonction des distances relatives entre la force et les grains.

Si  $g$  est la distance entre le grain **1** et la force  $\mathbf{F}$ , et si  $d$  est la distance entre deux sommets de grains en même temps que le diamètre des grains, on écrit donc simplement :

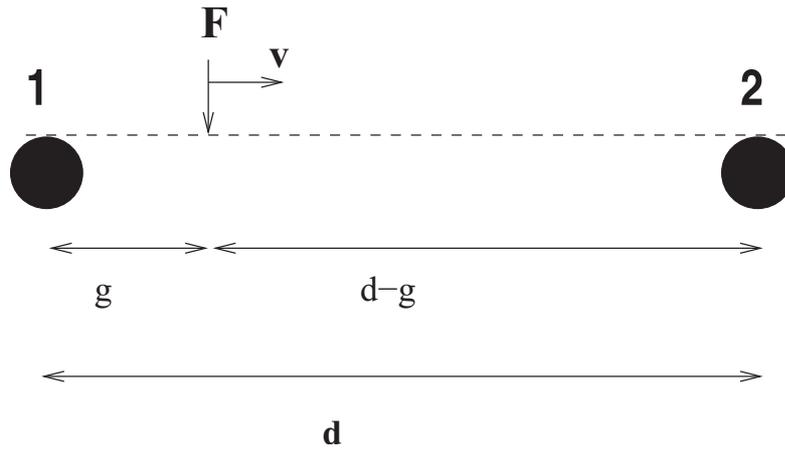


FIG. C.2 – Répartition d’une charge ponctuelle dans un cas 2D

$$F_1(g) = \frac{d-g}{d}F \quad (\text{C-1})$$

$$F_2(g) = \frac{g}{d}F \quad (\text{C-2})$$

$F_1$  et  $F_2$  désignent les forces reprises par les grains 1 et 2. On a de cette manière bien repris toute la charge  $F$  qui ne cesse pas de s’appliquer durant son mouvement entre grains. On peut vérifier que :

$$\forall g \in [0; d], F_1(g) + F_2(g) = F \quad (\text{C-3})$$

$$F_1(0) = F = F_2(d) \quad (\text{C-4})$$

$$F_2(0) = F_1(d) = 0 \quad (\text{C-5})$$

**Remarque importante** Le paramètre géométrique  $g$  est lié à la dynamique du problème par la relation bien connue :

$$g = v(t - t_0) \quad (\text{C-6})$$

où :  $v$  est la vitesse de la force,  $t$  le temps de référence, et  $t_0$  le moment où la force passe par le grain  $bf1$ .

### C.1.2 Cas 3D d’une force ponctuelle se déplaçant parallèlement aux alignements de granulats

Dans ce paragraphe, on généralise les notions précédentes à une “nappe” de grains comme le montre la figure C.3. Une force  $F$  se déplace avec une vitesse  $v$  sur un milieu granulaire comme on peut le voir sur la figure C.4 . Le diamètre des grains est de  $d$ .

En fait ce problème se limite à l’étude de la propagation d’une force entre quatre grains 1, 2 3 et 4 (fig.C.4).

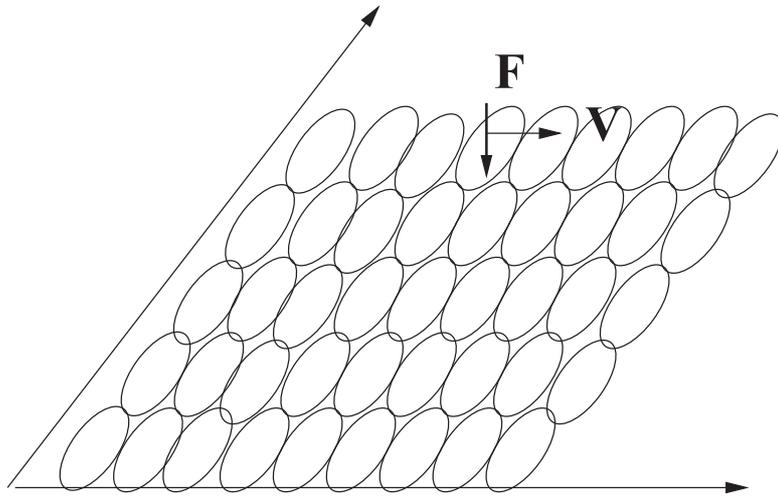


FIG. C.3 – Etude d'une charge ponctuelle dans un cas 3D

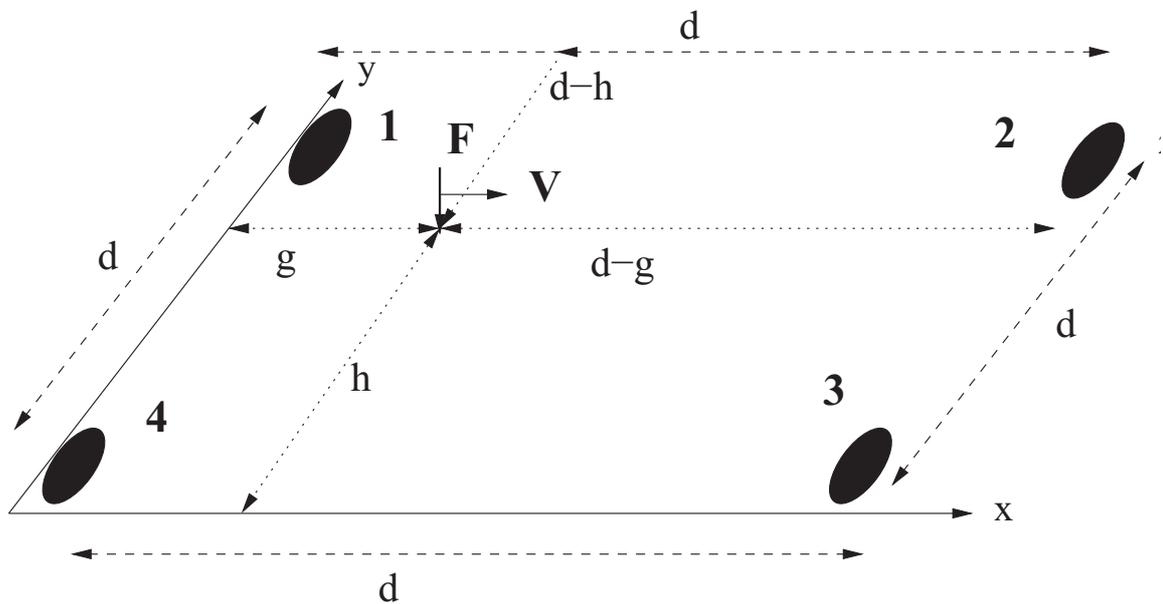


FIG. C.4 – Répartition d'une charge ponctuelle dans un cas 3D

Lorsque la force se trouve sur le sommet d'un grain, cette dernière s'applique entièrement sur ce grain. Lorsqu'elle se trouve dans l'aire délimitée par les quatre grains, on peut considérer qu'elle s'applique sur les quatre grains en fonction des distances relatives entre la force et les grains selon les deux directions  $x$  et  $y$ .

Si  $g$  est la distance (selon  $x$ ) entre le grain 1 et la force  $F$ , si  $h$  désigne la distance selon  $y$  entre le grain 4 et la force  $F$ , et si  $d$  est la distance entre deux sommets de grains en même temps que le diamètre des grains, on écrit donc simplement :

$$F_1(g, h) = \frac{(d-g)h}{d^2} F \quad (\text{C-7})$$

$$F_2(g, h) = \frac{gh}{d^2} F \quad (\text{C-8})$$

$$F_3(g, h) = \frac{(d-h)g}{d^2} F \quad (\text{C-9})$$

$$F_4(g, h) = \frac{(d-g)(d-h)}{d^2} F \quad (\text{C-10})$$

Comme précédemment,  $F_i$  désigne la force reprise par le grain  $i$ . On a de cette manière bien repris toute la charge  $F$  qui ne cesse pas de s'appliquer durant son mouvement entre grains. On peut vérifier que :

$$\forall (g, h) \in [0; d]^2, F = F_1(g, h) + F_2(g, h) + F_3(g, h) + F_4(g, h) \quad (\text{C-11})$$

$$F = F_4(0, 0) = F_1(0, d) = F_2(d, d) = F_3(d, 0) \quad (\text{C-12})$$

$$0 = F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = F_3(0, 0) \quad (\text{C-13})$$

$$0 = F_4(0, d) = F_2(0, d) = F_3(0, d) \quad (\text{C-14})$$

$$0 = F_4(d, d) = F_1(d, d) = F_3(d, d) \quad (\text{C-15})$$

$$0 = F_4(d, 0) = F_2(d, 0) = F_1(d, 0) \quad (\text{C-16})$$

## C.2 Cas d'une force répartie

Etant donné que la position d'une force répartie est plus complexe à définir, on applique une démarche différente. On suppose cependant toujours que la force  $F$  se propage le long d'une droite tangente aux sommets des grains sur la surface supérieure et parallèlement aux alignements de grains.

### C.2.1 Cas 2D

Supposons que la force  $\mathbf{F}(x, t)$  se répartisse entre deux bornes  $x_1$  et  $x_2$ . Cette force sera en contact avec un nombre  $N$  de grains.

**Remarque :**  $x_1$ ,  $x_2$ , et  $N$  peuvent être infinis.

A condition que  $\mathbf{F}(x, t)$  soit intégrable sur l'intervalle délimité par les deux bornes, et que  $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}(x_i, t)$  converge si  $N$  est infini, on écrit que :

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha(t) \mathbf{F}(x, t) dx = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(x_i, t) \quad (\text{C-17})$$

Dans ce cas, la force  $\mathbf{F}_i(t)$  qui s'exerce sur le grain  $i$  s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_i(t) = \frac{\mathbf{F}(x_i, t)}{\alpha(t)} \quad (\text{C-18})$$

Ainsi, soit  $\beta$  la surcharge appliquée aux grains,  $\beta$  est défini par :

$$\beta = \frac{\mathbf{F}_i(t) - \mathbf{F}(x_i, t)}{\mathbf{F}(x_i, t)} \quad (\text{C-19})$$

$$= \frac{1}{\alpha} - 1 \quad (\text{C-20})$$

**C.2.1.1 Exemple 1 : force de gravitationnelle**

On considère une force  $\mathbf{F}$  de la forme suivante :

$$\forall x \in [0.8; +\infty[, \mathbf{F}(x, t) = \frac{1}{x^2} \quad (\text{C-21})$$

$$\forall x \in ]-\infty; 0.8], \mathbf{F}(x, t) = 0 \quad (\text{C-22})$$

On suppose de plus que les grains (ponctuels) sont régulièrement répartis (tous les  $d$ ) selon la relation suivante :

$$x_i = i * d \quad (\text{C-23})$$

Dans l'approche discrète, les grains concernés vont de 1 à l'infini. La somme de cette série de Riemann est bien connue :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}(i * d, t) = \frac{1}{d^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad (\text{C-24})$$

$$= \frac{\pi^2}{6d^2} \quad (\text{C-25})$$

De plus, l'intégrale de  $\mathbf{F}$  sur  $[0.8; +\infty[$  donne le résultat suivant :

$$\int_{0.8}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{0.8} \quad (\text{C-26})$$

Par conséquent, le coefficient  $\alpha$  s'exprime de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{\frac{\pi^2}{6d^2}}{\frac{1}{0.8}} \quad (\text{C-27})$$

$$= 0.8 \frac{\pi^2}{6d^2} \quad (\text{C-28})$$

La force  $\mathbf{F}_i(t)$  qui s'exerce sur le grain "i" a donc pour expression :

$$x_i = i * d \quad (\text{C-29})$$

$$\mathbf{F}_i(t) = \frac{\mathbf{F}(x_i, t)}{\alpha} \quad (\text{C-30})$$

$$= \frac{1}{d^2 i^2} * \frac{6d^2}{0.8\pi^2} \quad (\text{C-31})$$

$$= \frac{7.5}{i^2 \pi^2} \quad (\text{C-32})$$

**C.2.1.2 Exemple 2 : force gaussienne**

On considère une force gaussienne  $\mathbf{F}(x, t)$  de la forme suivante :

$$\forall x \in ]-\infty; +\infty[, \mathbf{F}(x, t) = e^{-x^2} \quad (\text{C-33})$$

Comme précédemment, les grains sont régulièrement répartis (tous les 1m) selon la relation suivante :

$$x_i = i \quad (\text{C-34})$$

De plus, l'intégrale de  $F$  sur  $] -\infty; +\infty[$  est l'intégrale classique de Gauss. Elle donne le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{C-35})$$

Dans l'approche discrète, les grains concernés prennent tous les indices de  $\mathbf{Z}^1$ .

La série de terme général  $F_i(t) = e^{-i^2}$  est une série à terme positif convergente<sup>2</sup> De plus, on peut majorer son reste  $R_i$  pour avoir la précision voulue par la relation suivante :

$$0 < R_i < F_i \quad (\text{C-37})$$

### Démonstration :

Le reste  $R_i$  d'ordre  $i$  est défini par la relation suivante :

$$R_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} F_k \quad (\text{C-38})$$

On effectue des majorations sur les  $F_k$  :

$$F_{i+1} <= F_i e^{-(2i+1)} \quad (\text{C-39})$$

$$\dots \quad (\text{C-40})$$

$$F_{i+N} <= F_i e^{-(2iN+N^2)} \quad (\text{C-41})$$

Ainsi :

$$\sum_{k=i+1}^N F_k <= F_i \sum_{k=i+1}^N (e^{-2i})^k e^{-k^2} \quad (\text{C-42})$$

$$<= F_i \sum_{k=i+1}^N (e^{-2i})^k \quad (\text{C-43})$$

$$<= F_i \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-2i})^k \quad (\text{C-44})$$

$$<= \frac{F_i}{e^2} \frac{1}{1 - e^{-2i}} \quad (\text{C-45})$$

$$<= F_i \quad (\text{C-46})$$

Par passage à la limite sur  $N$ , il vient :

$$R_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} F_k <= F_i \quad (\text{C-47})$$

On veut connaître  $\alpha$  à  $10^{-4}$  près. Cela correspond à un indice  $i$  de 4 dans les deux sens ( positif et négatif).

### Démonstration

$$F_i < 10^{-4} \quad (\text{C-48})$$

$$e^{-i^2} < 10^{-4} \quad (\text{C-49})$$

$$-i^2 < -4 \ln(10) \quad (\text{C-50})$$

$$|i| > 2\sqrt{\ln(10)} = 3.03\dots \quad (\text{C-51})$$

<sup>1</sup> $\mathbf{Z}$  désigne l'ensemble des entiers relatifs

<sup>2</sup>il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert :

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} = e^{-(2i+1)} \rightarrow e^{-1} < 1 \quad (\text{C-36})$$

Dès lors, on a :

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} F_i = \sum_{i=-4}^4 F_i \pm R_4 \quad (\text{C-52})$$

$$= 1.7726... \quad (\text{C-53})$$

Par conséquent, le coefficient  $\alpha$  s'exprime de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{1.7726}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{C-54})$$

$$= 1.0001 \quad (\text{C-55})$$

### C.2.2 Cas 3D

Le cas 3D pour une force répartie est très voisin du cas 2D. Seul change le nombre d'intégrations et de sommations. Cette force, appliquée à un domaine  $D$  sera en contact avec  $N$  grains dans la direction  $x$  pour un  $y$  donné, et avec  $P$  grains dans la direction  $y$  pour un  $x$  donné.  $N$  et  $P$  dépendent en général l'un de l'autre.

A condition que  $\mathbf{F}(x,y,t)$  soit intégrable sur  $D$ , et que  $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \mathbf{F}(x_i, y_j, t)$  converge si  $N$  et/ou  $P$  est infini, on écrit que :

$$\int \int_D \alpha(t) \mathbf{F}(x, t) dx = \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(x_i, y_j, t) \quad (\text{C-56})$$

## C.3 Conclusions

On dispose d'une méthode d'approximation des fonctions qui permet de répartir une charge (continue ou pas) sur ses plus proches voisins. L'erreur quand on prend la trace des fonctions sur les noeuds est quantifiée par une coefficient  $\alpha$ .