

COURS
DE
STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

COURS

DE

STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

PAR

A. VIERENDEEL

Professeur à l'Université de Louvain
Ingénieur en chef, Directeur du Service Technique de la Flandre Occidentale
Ancien Chef de Service des Ateliers de Construction de La Louvière
Lauréat du Prix du Roi pour l'Architecture Métallique

TOME III

PONTS CONTINUS — PONTS TOURNANTS

TEXTE

LOUVAIN
IMPRIMERIE DES TROIS ROIS
(Société anonyme)

A. UYSTPRUYST, Directeur,

PARIS

V^{ve} CH. DUNOD

49, Quai des Grands Augustins, 49

1901

PONTS CONTINUS - PONTS TOURNANTS



CHAPITRE I

THÉORIE ANALYTIQUE DES POUTRES CONTINUES

§ 1. Considérations Générales

1. Poutres encastrées. — Nous avons constaté en étudiant les pièces à une travée (voir Tome II) que l'encastrement complet ou partiel aux extrémités de la travée donnait une économie de matière à égalité de résistance, malheureusement dans le cas d'une seule travée l'économie sur le métal de la poutre est généralement absorbée

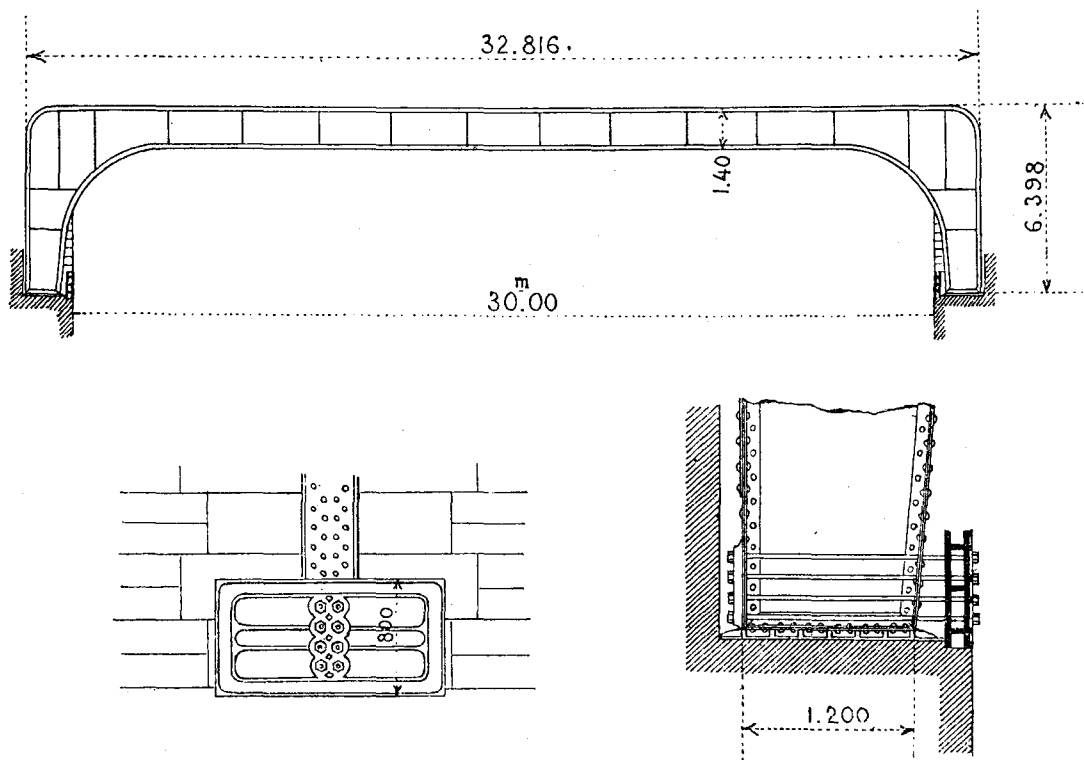


FIG. I.

et au-delà par le coût supplémentaire de la maçonnerie des appuis, aussi la poutre encastrée à une seule travée ne se rencontre guère; dans le cas de plusieurs travées solidaires le supplément de coût des

appuis n'existe pas car ce sont les travées elles-mêmes qui se faisant contrepoids réalisent tout naturellement l'encastrement, l'économie de métal est dans ce cas une économie réelle qui n'est pas contrebalancée par un coût plus élevé des maçonneries, c'est ce qui a fait le succès des poutres solidaires, autrement dit *poutres continues*; une autre cause de leur succès est la possibilité de la mise en place par lançage.

Nous ne connaissons qu'un seul exemple de pont encasté à une seule travée, c'est celui de 30 mètres construit il y a une quarantaine d'années dans la commune de *Gironde* sous la ligne de *Bordeaux à Cette* (FIG. 1), l'encastrement est produit par un retour d'équerre qui vient buter contre la culée et dont le pied est solidement ancré sur la maçonnerie, ce dispositif donne une certaine invariabilité, donc un certain encastrement, à la section du coude où commence la travée horizontale (1). Cette application est restée unique, toutefois le type de la FIG. 1 vient de renaître sous l'aspect FIG. 2, où les deux coudes

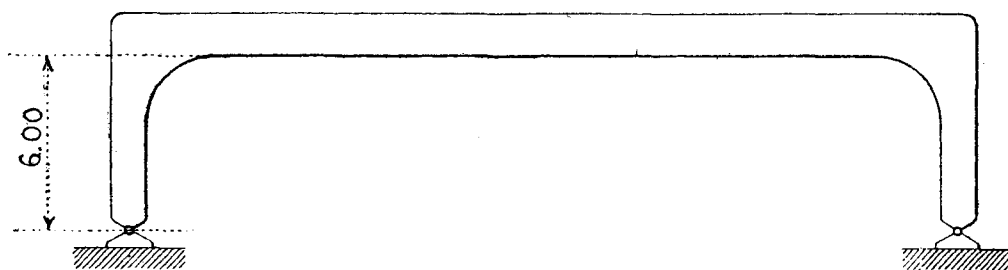


FIG. 2.

forment deux palées solidaires de la poutre horizontale et portent par simples rotules sur la maçonnerie de fondation.

Un pont de ce système a été construit en 1893 en France et en 1898 à Heuvy à la sortie de la gare de Namur; il est à noter que le longeron de la FIG. 2 n'est plus à proprement parler un longeron droit encasté, c'est un longeron polygonal qui doit se calculer par les formules des pièces polygonales (voir notre Tome V).

Le système de la FIG. 2 a été étendu à des poutres continues reposant sur plusieurs palées solidaires, FIG. 3 :

(1) *Traité pratique de la construction des Ponts et Viaducs métalliques*, par Regnault, ingénieur des Ponts et Chaussées, Paris, Dunod, 1870, p. 107.

Nous n'étudierons pas ici les poutres du type de la FIG. 1 ou 2, ni les poutres continues du type FIG. 3, nous renvoyons à notre tome V et aux mémoires ci-après :

Revue Générale des Chemins de Fer, Décembre 1893, Mémoire de MM. Guillaume et Vallat.



FIG. 3.

Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France, Février 1895, p. 248, Mémoire de M. Chaudy.

Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales de Gand, tome XX, 4^e livraison, 1897, Mémoire de M. Keelhoff.

Nous nous limiterons dans notre Tome III actuel à l'étude des poutres continues ordinaires reposant sur des appuis en maçonnerie.

* * *

2. Nous supposons une poutre qui a été exécutée sur chantier de façon que son axe neutre soit droit, cette poutre a été ensuite posée sur des appuis dont les niveaux sont quelconques avec toutefois la restriction que leur dénivellation est maintenue dans les limites de la déformation élastique de la poutre, c'est-à-dire que celle-ci peut, en se déformant, venir en contact avec ces divers appuis sans que, en aucun point, quelles que soient les surcharges, la limite d'élasticité de la matière soit dépassée, cette réserve est essentielle car si cette limite était dépassée l'équation de l'élastique à laquelle nous allons devoir recourir ne serait plus applicable et toute la théorie tomberait.

Chaque appui donne une réaction inconnue, mais aussi chaque appui donne une équation exprimant que la flèche de la poutre au droit de cet appui est égale à sa dénivellation, d'où, avec les conditions statiques, autant d'équations que d'inconnues et par conséquent la possibilité de résoudre le problème ; cette marche toutefois est très longue et n'est plus suivie aujourd'hui ; la théorie des poutres continues a été notablement simplifiée par la découverte de la formule des trois moments dite *Formule de Clapeyron*.

* * *

3. Formule de Clapeyron. — De l'ensemble des travées qui composent une poutre continue nous isolons deux travées consécu-

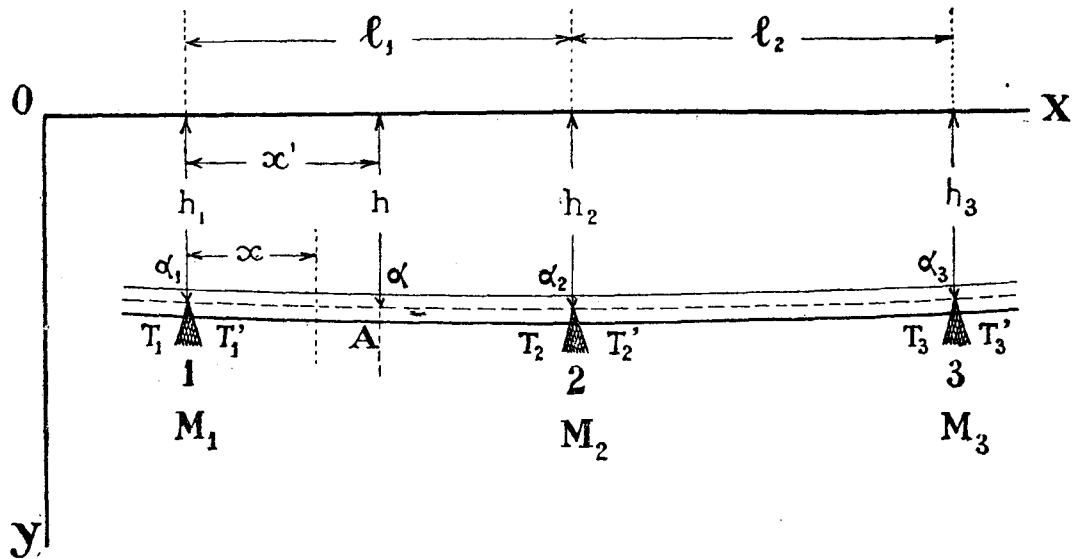


FIG. 4.

tives quelconques (FIG. 4) ; les appuis de ces travées sont numérotés 1, 2 et 3 ; l_1 et l_2 sont les longueurs de ces travées ; le moment d'inertie de la poutre est variable.

L'effet de toutes les forces appliquées à la poutre peut en une section quelconque de celle-ci être représenté par un moment fléchissant M , un effort tranchant T et un effort normal N ; nous avons en vue des ponts à axe droit horizontal avant déformation et soumis à des charges verticales, dans ces conditions l'effort N est quasi-nul et il n'y a aucune erreur pratique à le considérer comme tel.

Pour la section immédiatement à gauche de l'appui n° 1 le moment et l'effort tranchant sont représentés par M_1 et T_1 , pour celle immédiatement à droite par M_1 et T_1' ; pour les appuis n° 2 et n° 3 les valeurs correspondantes sont données sur la figure.

Nous rapportons la poutre continue à deux axes coordonnés rectangulaires dont l'origine O est quelconque, l'axe des X est horizontal c'est-à-dire parallèle à l'axe de la poutre avant déformation, l'axe des Y est vertical.

h_1 , h_2 et h_3 sont les ordonnées des appuis 1, 2 et 3.

α_1 , α_2 et α_3 sont les angles d'inclinaison de la fibre moyenne sur ces mêmes appuis.

Etudions la travée l_1 et pour ce faire supposons que l'origine O des coordonnées soit sur la verticale de l'appui n° 1.

En une section quelconque de la poutre à la distance x de l'origine nous avons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$d. \frac{dy}{dx} = \frac{Mdx}{EI}$$

or $\left[d. \frac{dy}{dx} \right]$ est l'angle de la section considérée et de celle infiniment voisine, de là il découle que l'inclinaison totale α de la fibre neutre de la poutre en une section A a la distance x' de l'appui n° 1 a pour expression :

$$\alpha = \alpha_1 + \int_0^{x'} d. \frac{dy}{dx} = \alpha_1 + \frac{1}{E} \int_0^{x'} \frac{Mdx}{I}$$

et par conséquent :

$$(1) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{Mdx}{I}$$

La variation de flèche en la section x' due à la variation angulaire en la section x a pour valeur :

$$(x' - x) d. \frac{dy}{dx} = (x' - x) \frac{Mdx}{EI}$$

d'où il résulte que la flèche totale h en x' a pour expression :

$$h = h_1 + \frac{1}{E} \int_0^{x'} \frac{M(x' - x)}{I} dx + \alpha_1 x'$$

et par conséquent :

$$(2) \quad h_2 = h_1 + \alpha_1 l_1 + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M(l_1 - x)}{I} dx$$

Si nous passons à la travée l_2 et plaçons l'origine des coordonnées sur la verticale de l'appui n° 2 nous avons :

$$(3) \quad h_3 = h_2 + \alpha_2 l_2 + \frac{1}{E} \int_0^{l_2} \frac{M(l_2 - x)}{I} dx$$

éliminant α_1 et α_2 entre les trois égalités (1), (2) et (3) nous obtenons :

$$(4) \quad (h_3 - h_2) l_1 - (h_2 - h_1) l_2 = \frac{l_2}{E} \int_0^{l_1} \frac{M}{I} x dx + \frac{l_1}{E} \int_0^{l_2} \frac{M}{I} (l_2 - x) dx$$

Le moment fléchissant M en une section quelconque de la travée l_1 , section à la distance x de l'appui n° 1 a pour expression :

$$(5) \quad M = + M_1 + T_1' x + \mu$$

μ est le moment des charges appliquées sur le tronçon de longueur x .

Le signe $+$ dans l'expression (5) de M a une signification générale, il signifie \pm .

Pour $x = l_1$ l'expression (5) devient :

$$(6) \quad M_2 = + M_1 + T_1' l_1 + \mu_2$$

μ_2 est le moment par rapport à l'appui n° 2 de toutes les charges appliquées sur la travée l_1 .

Eliminant T_1' entre (5) et (6) nous obtenons :

$$(7) \quad M = + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - \frac{\mu_2}{l_1} x + \mu$$

Nous obtiendrons de même pour la valeur de M en une section quelconque de la travée l_2 , section à la distance x de l'appui n° 2 :

$$(8) \quad M = + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x - \frac{\mu_3}{l_2} x + \mu$$

Nous substituons (7) et (8) dans (4) :

$$(h_3 - h_2)l_1 - (h_2 - h_1)l_2 = \frac{l_2}{E} \int_0^{l_1} \frac{x dx}{I} \left[M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - \frac{\mu_2}{l_1} x + \mu \right] + \frac{l_1}{E} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) dx}{I} \left[M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x - \frac{\mu_3}{l_2} x + \mu \right]$$

Cette expression développée nous donne :

$$(9) \quad M_1 l_2 \left[\int_0^{l_1} \frac{x dx}{I} - \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{I} \right] + M_2 \left[\frac{l_2}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{I} + l_1 \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) dx}{I} - \frac{l_1}{l_2} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x)x dx}{I} \right] + M_3 \frac{l_1}{l_2} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x)x dx}{I} = + l_2 \int_0^{l_1} \left(\frac{\mu_2 x}{l_1} - \mu \right) \frac{x dx}{I} + + l_1 \int_0^{l_2} \left(\frac{\mu_3 x}{l_2} - \mu \right) \frac{(l_2 - x) dx}{I} + E \left[(h_3 - h_2)l_1 - (h_2 - h_1)l_2 \right]$$

ce qui est la formule de Clapeyron ou formule des trois moments dans toute sa généralité.

Dans le cas où la poutre est de section uniforme et où les appuis sont sur une même horizontale, la formule devient :

$$(10) \quad l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 = 2l_1 \mu_2 - \frac{6}{l_1} \int_0^{l_1} \mu x dx + l_2 \mu_3 - \frac{6}{l_2} \int_0^{l_2} \mu (l_2 - x) dx.$$

La limite inférieure des intégrales est au point d'application de chaque charge.

Si la charge sur chaque travée est uniforme et la recouvre complètement, et si par unité courante nous la désignons par p_1 sur la travée l_1 et par p_2 sur la travée l_2 , nous avons pour la travée l_1 :

$$\mu_2 = \frac{p_1 l_1^2}{2}$$

$$\mu = \frac{p_1 x^2}{2}$$

et pour la travée l_2 :

$$\mu_3 = \frac{p_2 l_2^2}{2}$$

$$\mu = \frac{p_2 x^2}{2}$$

et la formule devient :

$$(11) \quad l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 = \frac{p_1 l_1^3}{4} + \frac{p_2 l_2^3}{4}$$

qui est l'expression la plus simple de la formule de Clapeyron.

Moyennant cette formule le problème de la stabilité d'une poutre continue devient relativement aisé à résoudre.

Il importe dans l'application de la formule de Clapeyron de poser clairement la règle des signes pour les moments et les forces, et cette règle une fois posée de ne jamais la perdre de vue, en général on affecte du signe + les forces verticales dirigées vers le bas et les moments dont le sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre, quant aux forces et moments inconnus on leur donne le signe + et c'est le signe du résultat qui définitivement indique leur sens.

§ 2. Etude d'un pont continu

4. Détermination des M sur les Appuis. — Soit un pont continu de n travées, chaque longeron repose sur $(n+1)$ appuis ; en pratique les appuis sont toujours exécutés de niveau, on prend des précautions spéciales pour obtenir que les points 1, 2, 3, etc. (FIG. 4) de la ligne d'axe de la poutre soient sur une rigoureuse horizontale ; nous admettons, ainsi que généralement c'est le cas, que sur les appuis extrêmes ou culées le pont est sans encastrement et sans porte-à-faux.

Afin de simplifier l'étude des ponts continus on fait généralement les suppositions suivantes :

- 1° La section des longerons est uniforme d'un bout à l'autre.
- 2° Le poids mort est pris constant sur la longueur d'une même travée mais différent d'une travée à l'autre, et on remplace la surcharge par une charge uniforme équivalente.
- 3° On ne fait pour chaque travée que deux hypothèses de surcharge, la surcharge nulle et la surcharge recouvrant toute la travée, c'est-à-dire qu'on ne considère pas les cas de surcharges partielles.

Nous représentons par $l_1 l_2 \dots l_{n-1} l_n$ les longueurs des travées et par $p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n$ la valeur par unité courante (poids mort ou surcharge) des charges qu'elles portent; la poutre se présente ainsi que l'indique la FIG. 5.

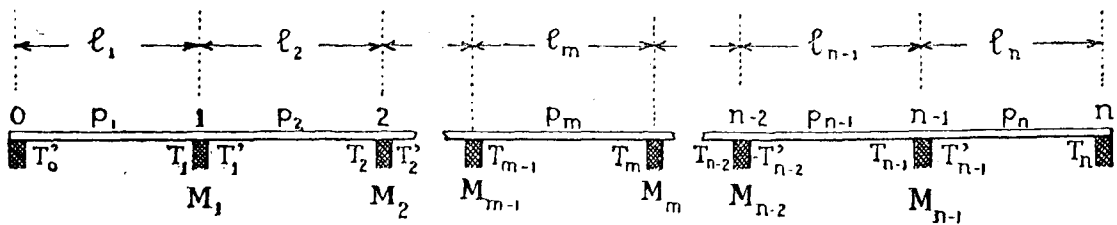


FIG. 5.

Nous appliquons l'équation (II) du n° 3 à chaque série de deux travées consécutives ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = \frac{I}{4} (p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3) \\
 & l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = \frac{I}{4} (p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3) \\
 & l_3 M_2 + 2(l_3 + l_4) M_3 + l_4 M_4 = \frac{I}{4} (p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & l_{n-2} M_{n-3} + 2(l_{n-2} + l_{n-1}) M_{n-2} + l_{n-1} M_{n-1} = \frac{I}{4} (p_{n-2} l_{n-2}^3 + p_{n-1} l_{n-1}^3) \\
 & l_{n-1} M_{n-2} + 2(l_{n-1} + l_n) M_{n-1} = \frac{I}{4} (p_{n-1} l_{n-1}^3 + p_n l_n^3)
 \end{aligned}$$

Voilà $(n-1)$ équations entre $(n-1)$ inconnues $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$, équations qui généralement se résolvent en recourant à la méthode des coefficients indéterminés, pour ce faire on multiplie la 1^{re} équation par

l'indéterminée α_{n-1} , la suivante par α_{n-2} , la troisième par α_{n-3} l'avant dernière par α_2 et enfin la dernière par α_1 , on additionne ensuite toutes les équations membre à membre ce qui donne :

$$(13) \quad M_1 [2(l_1 + l_2)\alpha_{n-1} + l_2\alpha_{n-2}] + M_2 [l_2\alpha_{n-1} + 2(l_2 + l_3)\alpha_{n-2} + l_3\alpha_{n-3}] + \\ + M_3 [l_3\alpha_{n-2} + 2(l_3 + l_4)\alpha_{n-3} + l_4\alpha_{n-4}] \dots\dots + M_{n-2} [l_{n-2}\alpha_3 + 2(l_{n-2} + l_{n-1})\alpha_2 + l_{n-1}\alpha_1] + \\ + M_{n-1} [l_{n-1}\alpha_2 + 2(l_{n-1} + l_n)\alpha_1] = \frac{I}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3)\alpha_{n-1} + \frac{I}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3)\alpha_{n-2} \dots\dots + \frac{I}{4}(p_{n-1} l_{n-1}^3 + p_n l_n^3)\alpha_1.$$

On profite de l'indétermination des $(n-1)$ facteurs auxiliaires α_1 à α_{n-1} pour annuler les coefficients qui dans l'équation (13) affectent les moments M_2 à M_{n-1} , cela donne $(n-2)$ égalités :

$$(14) \quad \begin{aligned} l_2\alpha_{n-1} + 2(l_2 + l_3)\alpha_{n-2} + l_3\alpha_{n-3} &= 0 \\ l_3\alpha_{n-2} + 2(l_3 + l_4)\alpha_{n-3} + l_4\alpha_{n-4} &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ l_{n-2}\alpha_3 + 2(l_{n-2} + l_{n-1})\alpha_2 + l_{n-1}\alpha_1 &= 0 \\ l_{n-1}\alpha_2 + 2(l_{n-1} + l_n)\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

qui renferment $(n-1)$ indéterminées, mais on peut en éliminer une en posant par exemple $\alpha_1 = 1$, et alors les $(n-2)$ égalités donnent :

$$(15) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -2 \frac{l_{n-1} + l_n}{l_{n-1}} \\ \alpha_3 &= -2 \alpha_2 \frac{l_{n-2} + l_{n-1}}{l_{n-2}} - \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} \\ \alpha_4 &= -2 \alpha_3 \frac{l_{n-3} + l_{n-2}}{l_{n-3}} - \alpha_2 \frac{l_{n-2}}{l_{n-3}} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \alpha_{n-2} &= -2 \alpha_{n-3} \frac{l_3 + l_4}{l_3} - \alpha_{n-4} \frac{l_4}{l_3} \\ \alpha_{n-1} &= -2 \alpha_{n-2} \frac{l_2 + l_3}{l_2} - \alpha_{n-3} \frac{l_3}{l_2} \end{aligned}$$

Voilà donc tous les facteurs auxiliaires qui sont déterminés et cela d'une façon très-commode, les substituant dans l'équation (13) on en tire le moment M_1 et remontant ensuite à la série des équations (12) on en déduit successivement les valeurs des divers moments $M_2, M_3, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}$ sur les appuis ; il est à remarquer que la dernière équation de la série (12) est une équation de condition.

On reconnaîtra facilement que les facteurs auxiliaires donnés par les équations (15) sont alternativement positifs et négatifs, que α_2 est négatif et plus grand que 2, et que les autres vont en croissant régulièrement à partir de α_2 .

Le calcul de ces facteurs doit se faire avec la plus grande exactitude car les erreurs pourraient s'accumuler et vicier considérablement les résultats définitifs.

* * *

Encastrement ou Porte-à-faux sur les appuis extrêmes. — Si, sur les appuis extrêmes, il y a encastrement ou prolongement de la poutre en un porte-à-faux deux nouveaux moments M_0 et M_n entrent dans les équations (12), donc on a $(n + 1)$ inconnues pour les $(n - 1)$ équations de la série (12), voici comment se trouvent les deux équations manquantes : s'il n'y a que simple porte-à-faux d'une longueur λ les deux moments M_0 et M_n sont connus à priori car ils ont pour expression $\frac{p\lambda^2}{2}$; s'il y a encastrement complet, nous appliquons à la première travée de la fig. 5 l'équation (2) du n° 3 dans laquelle α_1 , h_1 et h_2 sont faits égaux à zéro, d'où :

$$\int_0^{l_1} M (l_1 - x) dx = 0$$

y remplaçant M en fonction de M_0 et M_1 conformément à l'égalité (7) et μ en fonction de p_1 on trouve pour la première travée :

$$(16) \quad 2 M_0 + M_1 = \frac{p_1 l_1^2}{4}$$

pour la dernière travée il faut combiner les équations (1) et (2) du n° 3 en éliminant α_1 ce qui donne :

$$(17) \quad h_2 = h_1 + l_1 \left(\alpha_2 - \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M dx}{E} \right) + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M(l_1 - x)}{I} dx$$

et y faisant h_1 , h_2 et α_2 égaux à zéro, on trouve :

$$\int_0^{l_1} M x dx = 0$$

y remplaçant l_1 par l_n et M en fonction de M_{n-1} , M_n et p_n on trouve :

$$(18) \quad M_{n-1} + 2 M_n = \frac{p_n l_n^2}{4}$$

et les deux équations (16) et (18) jointes à la série des équations (12) nous donnent $(n + 1)$ équations pour les $(n + 1)$ inconnues du problème.

Si, sur les culées, les encastremets au lieu d'être complets, ce qui correspond à α_0 et α_n égaux à zéro, étaient partiels, les angles α_0 et α_n auraient des valeurs connues et les relations (2) et (17) donneraient les deux nouvelles équations correspondant à la première et à la dernière travée, équations qui jointes à la série (12) permettent de déterminer les $(n + 1)$ moments sur les appuis.

Si on voulait résoudre le problème de la détermination des moments sur les appuis dans le cas général de dénivellation, de variation de I et de charges locales, il faudrait appliquer l'équation (9) du n° 3.

* * *

5. Diagramme des Moments fléchissants. — Ayant déterminé les moments sur les appuis on est à même de tracer le diagramme des moments fléchissants sur toute la longueur de la poutre ; l'équation (7)

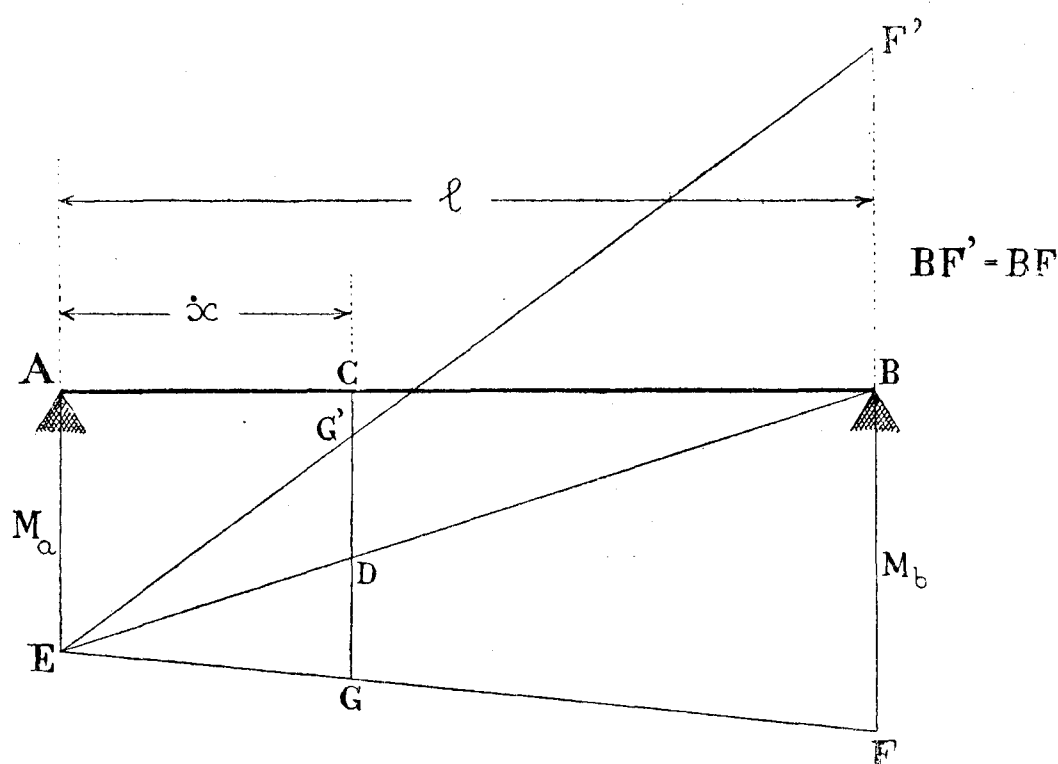


FIG. 6.

légèrement transformée nous donne pour une travée quelconque AB de longueur l (Fig. 6) :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l} - \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x$$

le second terme de l'expression de M_x est composé de quantités toutes connues et peut se construire graphiquement : le terme $\left[M_a \frac{l-x}{l} \right]$ a pour valeur CD, $\left[M_b \frac{x}{l} \right]$ a pour valeur DG si M_b a le même signe que M_a , il a pour valeur DG' s'ils sont de signe contraire ; donc le diagramme de

$$M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l}$$

est la droite EF si M_a et M_b sont de même signe, ou la droite EF' s'ils sont de signes contraires.

On peut d'une façon analogue tracer le diagramme de

$$- \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x$$

et additionnant les ordonnées de ce diagramme avec celles de EF ou EF' on obtient le diagramme des M_x sur la longueur de la travée l .

Supposons que la charge p soit uniformément répartie et recouvre toute la travée, nous avons :

$$- \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x = - \frac{1}{2} p l x + \frac{1}{2} p x^2$$

dont le diagramme est la parabole ACB de la Fig. 7.

Nous supposerons que le diagramme des moments dûs à M_a et M_b soit EF, cela étant le diagramme de M_x s'obtiendra en portant les ordonnées de la parabole ACB à partir de la droite EF, prenant $GH' = DH$ on a $DH' = M_x$ et le lieu des points H' est la parabole EC₁F dont les ordonnées prises par rapport à AB mesurent en grandeur et en signe les moments fléchissant M_x sur toute la longueur de la travée considérée.

L'équation de EC₁F est :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l} - \frac{1}{2} p l x + \frac{1}{2} p x^2$$

ou bien encore :

$$M_x = M_a - T'_a x + \frac{p x^2}{2}$$

Le paramètre $(\frac{2}{p})$ de cette parabole dépend donc uniquement de la charge portée par la travée et non de ses moments d'encastrement.

Pour l'ensemble des travées d'un pont, le diagramme des moments fléchissants se présente comme l'indique le FIG. 8.

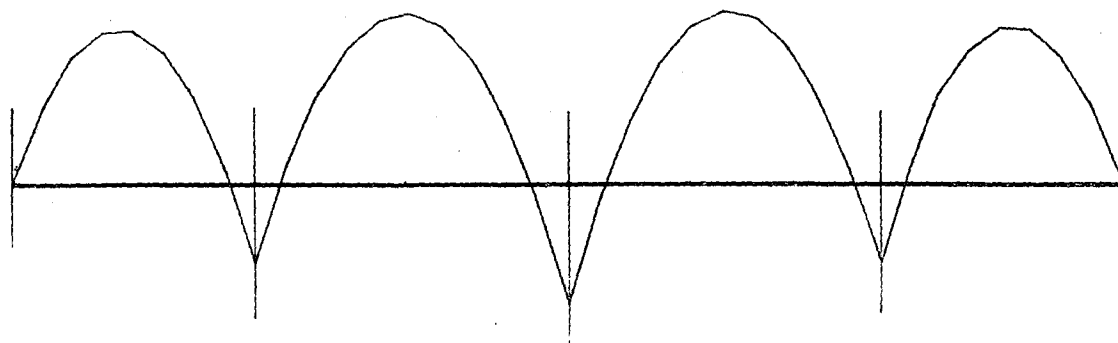


FIG. 8.

Si la charge p est la même pour les diverses travées toutes les paraboles pourront être tracées avec un même patron que l'on découpera dans une feuille de papier fort, on placera le sommet de ce patron (en maintenant son axe vertical) au point sommet de la parabole de chaque travée et un simple trait de crayon sur le pourtour du patron donnera le diagramme ; comme vérification on a que cette parabole doit passer par les points qui déterminent M_a et M_b , c'est-à-dire les points E et F de la FIG. 7, et aussi par les points K et N.

* * *

6. Détermination des Efforts Tranchants sur les Appuis et Diagrammes de ces efforts. — L'équation (6) du n° 3 nous donne pour une travée quelconque AB (FIG. 7) :

$$T'_a = \frac{M_b - M_a}{l} - \frac{pl}{2}$$

d'où on tire T_x et par conséquent T_b , voilà donc connus les efforts tranchants sur toute la longueur de la travée.

Si la charge est uniforme et recouvre toute la travée on a :

$$T'_a = \frac{M_b - M_a}{l} - \frac{pl}{2}$$

et en la section quelconque D de la FIG. 7, section à la distance x de A, on a :

$$T_x = T'_a + px = \frac{M_b - M_a}{l} - p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

et pour $x = l$ on a :

$$T_b = \frac{M_b - M_a}{l} + \frac{pl}{2}$$

Nous connaissons donc T'_a et T_b , et nous voyons que de l'une à l'autre la variation de T_x se fait suivant les ordonnées d'une droite, généralement T'_a et T_b sont de signes contraires et la droite se présente comme l'indique la FIG. 9.

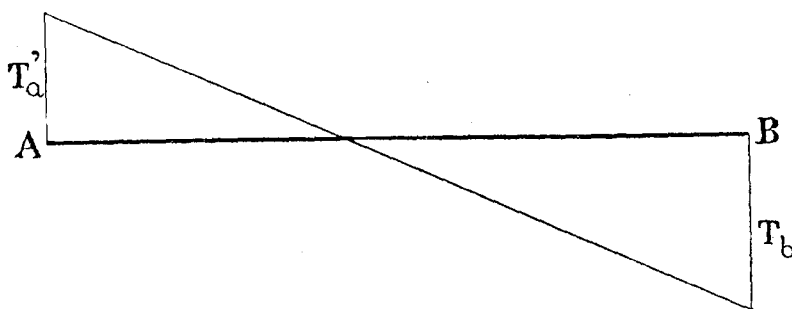


FIG. 9.

L'effort tranchant est nul pour $x = \frac{T'_a}{p}$, ce qui est précisément l'abscisse du sommet de la parabole des moments.

Pour un ensemble de travées, chacune portant une charge uni-

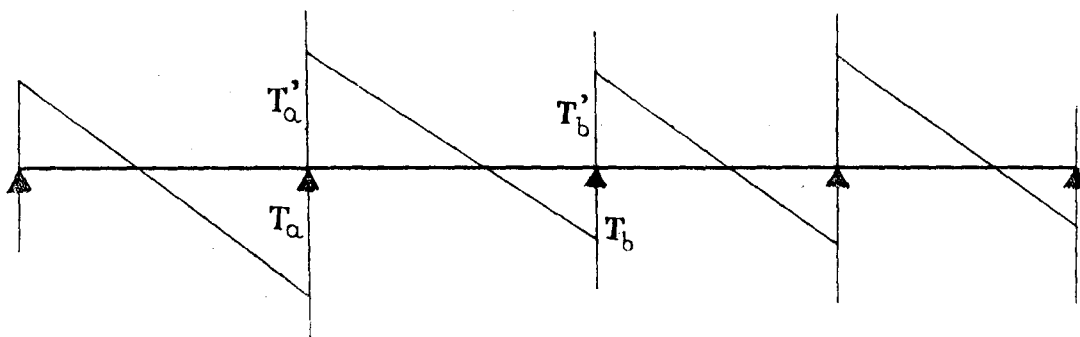


FIG. 9^{bis}.

forme complète, le diagramme des efforts tranchants a l'aspect de la FIG. 9^{bis}.

La réaction de chaque appui (ou la charge qu'il porte) a pour valeur $(T_a + T'_a)$.

et a priori en indiquent l'allure générale, ainsi la première équation nous donne :

$$M_2 = - M_1 \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$$

résultat qui indique que les deux moments successifs M_1 et M_2 sont de signes contraires, et de plus que :

$$M_2 > 2 M_1$$

La seconde équation nous donne :

$$M_3 = - 2 M_2 \left[1 + \frac{l_2}{l_3} \left(1 - \frac{l_2}{4(l_1 + l_2)} \right) \right]$$

ce qui encore dénote que M_3 et M_2 sont de signes contraires et que :

$$M_3 > 2 M_2$$

et ainsi de suite jusque la travée chargée ; si nous prenons la dernière équation de la série nous en tirons :

$$M_{n-2} = - M_{n-1} \frac{2(l_{n-1} + l_n)}{l_{n-1}}$$

ce qui indique que M_{n-1} et M_{n-2} sont de signes contraires et que :

$$M_{n-2} > 2 M_{n-1}$$

et ainsi de suite en remontant jusque la travée chargée ; ces résultats montrent que l'influence de la travée chargée décroît très rapidement à mesure qu'on s'en éloigne.

Sur les travées non chargées le moment M_x en une section quelconque a pour expression :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} - M_b \frac{x}{l}$$

équation qui prouve que le diagramme des M_x est une droite inclinée sur l'axe de la poutre ; les points F (FIG. 10) où ces droites coupent l'axe de la poutre, c'est-à-dire les points où les moments sont nuls, se déterminent par l'équation :

$$M_x = 0 \text{ d'où } x = \frac{l}{1 + \frac{M_b}{M_a}}$$

Or nous venons de voir que le rapport $\frac{M_b}{M_a}$ de deux moment consécutifs dans une travée non chargée est fonction des longueurs des travées et de rien d'autre, donc les points F dépendent uniquement de

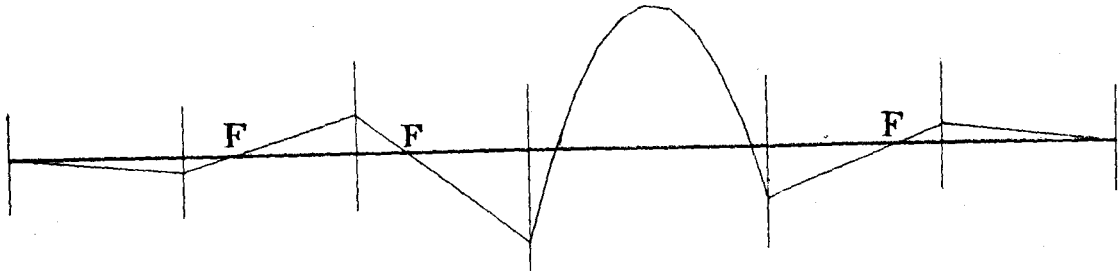


FIG. 10.

ces longueurs et ne sont influencés ni par la position de la travée chargée, ni par la valeur de la charge qu'elle porte, ces points sont donc fixes, on les nomme *Points fixes*, ou *Foyers* ou *Points d'inflexion*.

Dans chaque travée à gauche de celle chargée on a :

$$\frac{M_b}{M_a} > 2$$

l'équation ci-dessus nous donne

$$x < \frac{l}{3}$$

donc les points F sont dans le premier tiers de ces travées.

Pour celles à droite de celle chargée, les points F sont dans le dernier tiers.

Une travée pouvant se trouver successivement à droite et à gauche d'une autre chargée a donc deux foyers, chacun dans le tiers extrême, sauf cependant pour la première travée de gauche où le foyer se confond avec l'appui de gauche, car $M_a = 0$ ce qui donne $x = 0$, et pour la première travée de droite où le foyer se confond avec l'appui de droite car $M_b = 0$ ce qui donne $x = l$.

Les foyers une fois déterminés par l'équation :

$$x = \frac{l}{1 + \frac{M_b}{M_a}}$$

pour une position quelconque de la travée surchargée peuvent donc servir pour toutes les autres positions.

Nous indiquerons dans la partie traitant du calcul graphique des poutres continues un moyen de détermination directe des foyers.

Le diagramme de la travée chargée de p à la forme trouvée ci-avant au n° 5 et FIG. 7 ; en résumé donc le diagramme d'ensemble des moments fléchissants d'une poutre continue dont une seule travée est chargée est celui donné FIG. 10.

* * *

L'effort tranchant dans la travée chargée a pour équation (voir n° 6) :

$$T_x = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} - p\left(\frac{l_m}{2} - x\right)$$

ce qui est l'équation d'une droite inclinée sur l'axe de la poutre, voir FIG. 8.

Dans les travées non chargées, l'expression de l'effort tranchant est :

$$T_x = \frac{M_b - M_a}{l}$$

ce qui est une droite parallèle à l'axe de la poutre, droite alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe car comme nous venons de le voir $(M_b - M_a)$ est alternativement positif et négatif. Le diagramme des efforts tranchants se présente donc comme donné par la FIG. 11.

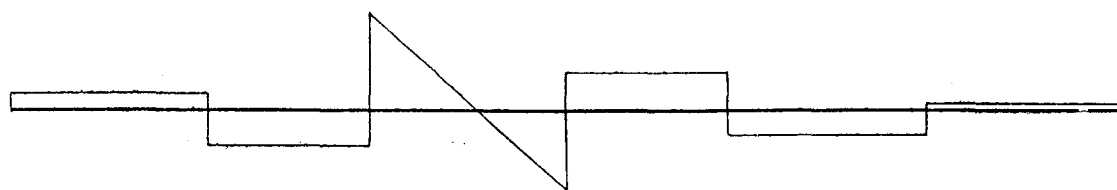


FIG. 11.

La différence $(M_b - M_a)$ va en diminuant rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la travée chargée, car nous avons vu que pour chaque travée :

$$M_a < \frac{1}{2}M_b$$

cet effet se traduit sur les diagrammes des M et des T (FIG. 10 et 11) par une rapide diminution des ordonnées, il montre que l'influence

de la travée chargée s'amointrit très rapidement à mesure que l'on s'en éloigne.

* * *

8. Diagramme des moments maxima. — Pour déterminer les maximum des moments fléchissants on tracera sur une même feuille et en dessous les uns des autres :

1^o Le diagramme de la charge morte, diagramme analogue à celui FIG. 8.

2^o Le diagramme de la surcharge occupant la première travée, toutes les autres étant vides, ce diagramme sera analogue à celui FIG. 10.

3^o Le diagramme de la surcharge occupant la seconde travée seule, puis la troisième seule..... et ainsi de suite pour chacune des travées.

On additionnera toutes les ordonnées positives des diagrammes du 2^o et 3^o, on obtiendra ainsi en vertu du principe de la superposition des effets le diagramme des moments maximum positifs que peut produire la surcharge, nous le désignerons en le nommant diagramme P ; on déterminera de même le diagramme des moments maximum négatifs de la surcharge, diagramme N.

On additionnera algébriquement le diagramme P avec celui du 1^o, ce qui donnera un nouveau diagramme P' qui est celui des plus grands maximum positifs.

On fera de même pour le diagramme N et le 1^o, ce qui donnera N' qui est le diagramme des plus grands maximum négatifs.

On superposera les diagrammes P' et N', et l'enveloppe de ces deux diagrammes sera le diagramme des plus grands maximum cherchés.

* * *

Généralement les ponts continus sont symétriques par rapport à leur milieu, c'est-à-dire que la première moitié du pont est absolument semblable à la seconde, dans ce cas le tracé des diagrammes ne doit évidemment se faire que pour la première moitié, nous les donnons PL. I pour un pont à trois travées :

A est le diagramme de la charge morte.

B donne en 1 le diagramme de la surcharge recouvrant la première travée ; la ligne 3 est le prolongement de ce diagramme 1 sur la seconde moitié de la seconde travée et sur la troisième, cette ligne 3 ramenée sur la première travée et la 1^{re} moitié de la seconde représente le diagramme de la surcharge sur la troisième travée ; la ligne 2 est le diagramme de la surcharge sur la travée du milieu.

En C nous avons deux diagrammes, celui supérieur P est la somme des moments positifs des divers diagrammes B, celui inférieur N est la somme des moments négatifs des B.

Il faut maintenant additionner algébriquement P et A, puis N et A, et enfin prendre l'enveloppe de ces deux nouveaux diagrammes et ce diagramme enveloppe sera celui des plus grands moments fléchissants pouvant se produire dans le pont étudié.

Il est à remarquer qu'il n'est pas nécessaire de faire l'addition $(P + A)$ et $(N + A)$ sur toute la longueur des diagrammes, en effet si on replie N sur P ainsi qu'il est fait en traits interrompus sur la figure C on constate que les points d'intersection *i* et *n* sont sur les verticales des points d'inflexion *b* et *d* du diagramme A, cela parce que la somme $(P + N)$ donne A, sauf à tenir compte de la différence entre *p* poids mort et *p* surcharge, de là il résulte que sur la distance *ab* les moments positifs P l'emportent sur ceux négatifs N, sur *bd* ce sont les N qui l'emportent sur les P, sur *de* c'est P qui l'emporte sur N et par conséquent pour avoir le diagramme des plus grands maxima il suffit d'additionner les ordonnées du diagramme *ahimno* de la figure C avec les ordonnées du diagramme A, et on obtient ainsi le diagramme D qui est l'enveloppe cherchée.

* * *

9. Diagramme des efforts tranchants maxima. — En ce qui concerne les efforts tranchants le signe ou sens des efforts a une grande importance, car là où il y a compression il faut se prémunir contre toute éventualité de flambage ; afin d'éviter toute erreur sur le sens des efforts il convient de tracer les diagrammes des efforts tranchants pour toutes les travées d'un pont, même dans le cas où celui-ci est symétrique.

Nous donnons PL. II en A le diagramme pour la charge morte, ce diagramme est accompagné de flèches qui indiquent le sens de

l'effort tranchant en supposant le tronçon de gauche supprimé et l'effort s'exerçant sur le tronçon de droite, ainsi en la section V de la figure A l'effort qui agit sur le tronçon VL est dirigé vers le haut, par réaction celui qui agit sur le tronçon VK est de même valeur mais dirigé vers le bas.

En B nous avons le diagramme pour la surcharge sur la première travée seule ; en C, le diagramme pour la surcharge sur la seconde ; en D, celui pour la surcharge sur la 3^e.

Le tracé E donne l'enveloppe des plus grands maxima positifs et négatifs.

On remarque que vers la partie centrale des travées il y a un intervalle dans lequel une même barre peut selon le cas être sollicitée à la traction ou à la compression.

* * *

10. Détermination de la section des brides et des barres de treillis de la poutre continue. — Nous sommes en possession des diagrammes des maxima, celui des moments fléchissants sert pour la détermination de la section des brides, celui des efforts tranchants pour la détermination de la section des barres de treillis.

La section de la poutre continue est en double té (FIG. 12) ou en caisson (FIG. 13), selon l'importance du pont.

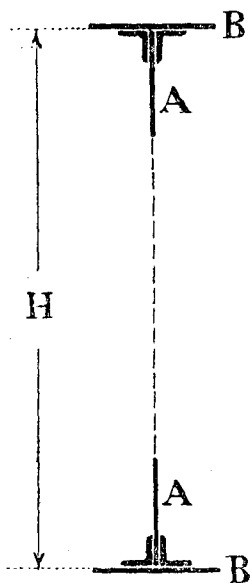


FIG. 12.

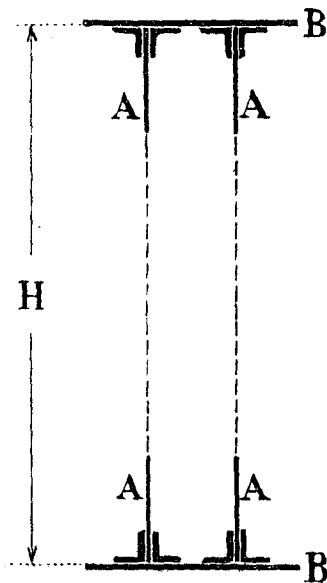


FIG. 13.

Les brides ne peuvent jamais avoir en dessous d'une section minimum imposée par la pratique, ce minimum se compose généralement des nervures verticales A, d'une tôle horizontale B formant table et des cornières réunissant A et B, il convient que les épaisseurs des plats et cornières ne soient pas inférieures à 8 millimètres. Soit Ω la superficie de la section

minimum, le moment résistant minimum est $t\Omega H$ kilogrammètres,

nous portons ce moment sur le diagramme des moments fléchissants maximum, il est représenté par l'horizontale 1 de la FIG. D, PL. I, horizontale tirée à la distance :

$$al = t\Omega H$$

Si à la section minimum ci-dessus on ajoute haut et bas une tôle de superficie ω le moment résistant de la poutre augmente de $t\omega H$, nous menons une horizontale 2 à la distance :

$$lr = t\omega H$$

Une seconde tôle donnerait une horizontale n° 3 à la même distance lr de celle n° 2 et ainsi de suite.

Toutes ces horizontales qui constituent le diagramme des moments résistants de la poutre sont tracées sur le diagramme des moments fléchissants maxima.

Pour l'équilibre il faut que le diagramme des moments résistants enveloppe celui des moments fléchissants, cette enveloppe est figurée en D, PL. I, par les traits verticaux interrompus tirés pour chaque tôle de table à la limite de la courbe des moments fléchissants; pour que l'équilibre existe dans de bonnes conditions pratiques il faut que chaque tôle ajoutée soit rendue absolument solidaire de la section avant que son diagramme ne pénètre dans celui des moments fléchissants, il faut donc pour chaque tôle un supplément de longueur sv à chaque bout tel qu'on y puisse mettre un nombre de rivets représentant comme résistance celle de la tôle en cause, alors en v la tôle supplémentaire est parfaitement solidaire du reste de la section et donne réellement le supplément de moment résistant figuré par l'horizontale du diagramme.

Le diagramme enveloppe pratique des moments résistants est celui figuré en gros traits noirs pleins; sur ce diagramme on relève à l'échelle les longueurs ss des diverses tôles entrant dans la composition des tables de la poutre; comme les laminoirs ne peuvent généralement pas fournir ces longueurs d'une pièce et que d'autre part il y a à tenir compte des possibilités d'expédition on profite du diagramme des tôles pour y tracer la subdivision de ces tôles et la longueur des divers couvre-joints, nous renvoyons pour ces détails aux traités de construction des ponts.

Nous avons maintenant à déterminer les sections des barres de treillis; les poutres continues en treillis sont généralement du type à croisillons avec montants, croisillons simples FIG. 14 ou croisillons doubles FIG. 15.

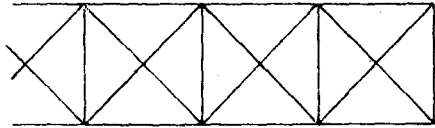


FIG. 14.

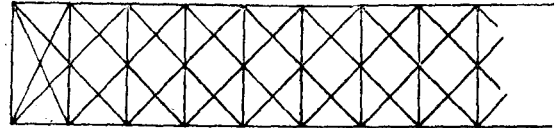


FIG. 15.

Pour le calcul on fait abstraction des montants, car si on n'en faisait pas abstraction on ne saurait pas calculer, de plus on admet que dans chaque section droite l'effort tranchant se répartit par parties égales sur toutes les barres de treillis rencontrées, c'est une pure supposition car il est certain que la repartition est toute autre.

Le diagramme des efforts tranchants maximum est donné par la FIG. E de la Pl. II, ce diagramme indique que les efforts tranchants varient d'une façon continue, il n'est pas possible en pratique de suivre cette indication car elle donne pour chaque barre une section différente, cela compliquerait l'exécution et la rendrait coûteuse, aussi on remplace le diagramme continu par le diagramme en escalier figuré en gros traits, diagramme qui dans le cas figuré en E donne 4 types de barres correspondant à 4 efforts tranchants différents: K_1 , K_2 , K_3 et K_4 .

Si le croisillon est simple, chaque barre supporte la moitié de l'effort tranchant et en vertu de l'équation statique des composantes verticales nous avons (FIG. 16) :

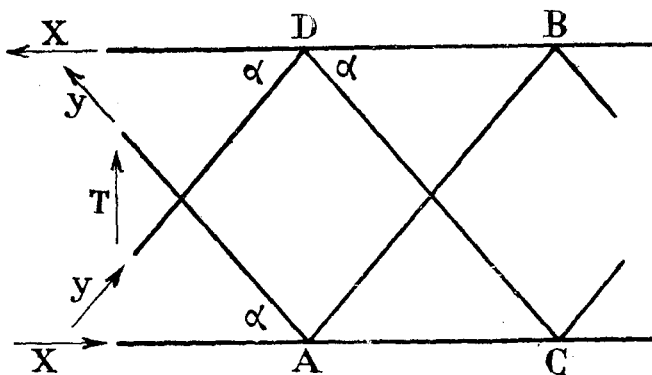


FIG. 16.

$$2y \sin \alpha = T$$

$$\text{d'où } y = \frac{T}{2 \sin \alpha}$$

Là où sur le diagramme E de la PL. II, l'effort tranchant est dirigé vers le haut les barres inclinées dans le sens AB

(FIG. 16) sont comprimées, celles dans le sens DC sont étendues ;

l'inverse se produit pour les panneaux où l'effort tranchant est dirigé vers le bas.

Il y a une exception pour les panneaux du centre qui supportent l'effort tranchant K_I , celui-ci peut selon la position du train être dirigé vers le haut ou vers le bas, aussi toutes les barres de ces panneaux doivent être calculées en vue d'une compression d'intensité $\frac{K_I}{2 \sin \alpha}$.

On remarquera que le diagramme pratique en escalier n'est pas tangent au diagramme théorique car il faut que les verticales de l'escalier cadrent avec les montants des panneaux du treillis.

Les appuis du pont supportent la somme des efforts tranchants qui agissent à droite et à gauche de l'appui (voir n° 6), la valeur de cette charge est KF (FIG. E, PL. II) sur chaque culée, et GH sur chacune des deux piles intermédiaires.

Les montants de la poutre situés au droit des appuis supportent par compression la moitié de la charge sur ces appuis, cela parce que la fatigue des croisillons qui aboutissent au pied de ces montants est directement équilibrée par les chassis d'appui sans passer par les montants, le montant sur chaque culée est donc comprimé par la force $\frac{KF}{2}$, et celui sur chacune des deux piles intermédiaires par la force $\frac{GH}{2}$ (FIG. E, PL. II).

Comme nous l'avons dit, les autres montants de la poutre ne peuvent se calculer, on leur donne une section au jugé, où bien encore une section correspondant à la moitié de l'effort tranchant au droit du montant considéré, section qu'il devrait avoir si en ce point il y avait un appui fixe. (Voir aussi tome II, chap. VII).

* * *

11. Proportions des Travées. — Le rapport entre les longueurs des diverses travées n'est pas absolument indifférent : le diagramme C de la PL. II nous montre que pour une surcharge sur la seconde travée seule il y a une traction Ke sur l'appui K, c'est-à-dire une tendance à soulèvement de la première travée de dessus son appui K, tendance dont l'énergie est mesurée par Ke , cette tendance est combattue par la charge morte que porte la première travée, charge qui sur l'appui K donne une pression mesurée par Ka (voir diagramme A),

donc la pression réelle sur K est mesurée par $(K_a - K_e)$, si la première travée diminue de longueur par rapport à la suivante la quantité K_a diminue et celle K_e augmente, il pourrait donc arriver un moment où $(K_a - K_e)$ serait négatif, c'est-à-dire où le soulèvement se produirait réellement, or après le soulèvement il y a la chute et de là des chocs très destructeurs pour le pont et pour ses appuis, pour éviter cet inconvénient il y a trois moyens :

1° Ancrer le longeron sur l'appui K, ce moyen n'est pas pratique car il y a les nécessités de la dilatation et en outre pareil ancrage courrait grand risque de se disloquer.

2° Munir l'extrémité de la poutre, en K, d'un contrepoids suffisant, ce moyen a été quelquefois appliqué, mais il est très coûteux.

3° Enfin, dernier moyen, éviter de donner à la première travée une trop faible longueur par rapport aux suivantes, c'est le moyen le meilleur car alors cette travée forme elle-même contrepoids, aussi c'est le moyen le plus fréquemment employé.

La question de la proportion à donner aux travées en vue d'éviter l'inconvénient que nous signalons ci-dessus à été traitée aux *Annales des Ponts et Chaussées*, 1872, 2^e semestre. Une bonne proportion est de donner même longueur à toutes les travées intermédiaires et les $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ de cette longueur pour les travées extrêmes, ces proportions écartent tout danger de soulèvement.

Le rapport $\frac{4}{5}$ est assez fréquemment usité en pratique, outre l'avantage contre le soulèvement il a encore celui de donner une poutre économique, c'est-à-dire une poutre pour laquelle le moment moyen est sensiblement un minimum (Voir BRESSE, *Cours de mécanique appliquée*, 3^e partie, p. 250).

* * *

12. Variation de I. — Les poutres continues se calculent généralement en supposant le moment d'inertie constant (voir n° 4) et en exécution on le fait varier à la demande des diagrammes obtenus, on applique en somme la méthode de fausse position mais en s'arrêtant à la première solution trouvée; d'une étude que M. KLEITZ, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a fait paraître dans les *Annales* de Février 1876 il résulte que cette façon de procéder donne des résultats

entachés, pour certains moments fléchissants, d'une erreur de 10 % en moins, cette erreur n'a rien d'excessif et en tout cas n'est pas suffisante pour faire abandonner la méthode habituelle de calcul des poutres continues.

Voir au sujet des poutres continues de section variable : *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils de France*, 2^d semestre de 1880, p. III (mémoire de M. CLERC), et aussi novembre 1898, p. 375.

* * *

13. Dénivellation. — L'éventualité de dénivellation des appuis est une grave objection que l'on adresse au système des poutres continues, car elle peut augmenter les fatigues dans des proportions excessives et d'autant plus dangereuses qu'elles sont a priori inconnues (voir chap. III ci-après).

Les effets de la dénivellation sont d'autant moins graves que le poutre est plus flexible, donc qu'elle est relativement moins haute, malheureusement si on diminue la hauteur proportionnelle on augmente le poids et sacrifie l'économie.

La dénivellation peut être due soit à un mauvais nivellement lors de la construction des appuis, soit à un tassement ultérieur de ceux-ci, si le pont a été mis en place par lançage il sera influencé par ces deux genres de dénivellation, s'il a été établi sur pont de service il ne le sera que par la seconde. — La dénivellation peut aussi résulter de la compression de la pile, voir le tome VI traitant des piles métalliques, ce dernier genre de dénivellation est en général peu dangereux.

M. BRESSE démontre, dans son ouvrage cité ci-dessus, qu'il est préférable établir les têtes des piles suivant une parabole bombée vers le haut, parabole excessivement peu bombée d'ailleurs, il en donne l'équation, ce bombement diminue sensiblement les moments, de cette indication théorique, assez difficilement réalisable en pratique, nous tirons cependant cette conclusion que dans le nivellement des têtes des piles il est préférable prendre les incertitudes du coup de niveau au-dessus de l'horizontale qu'au-dessous.

Quoiqu'il en soit, là où le terrain ne donne pas toute garantie, là où des tassements sont possibles, le pont continu est à déconseiller, c'est le motif pour lequel il n'est pas employé en Hollande et ne l'est guère en Allemagne, ni en Angleterre, ni aux Etats-Unis.

Le calcul des effets d'une dénivellation des appuis peut se faire en appliquant la formule générale de Clapeyron trouvée ci-dessus au n° 3, toutefois il est plus simple de résoudre ce problème par la méthode graphique du chap. II ci-après, voir le n° 45.

* * *

14. Economie. — M. GAUDARD a recherché, dans son *Etude sur les ponts en fer, 1865*, quelle était approximativement l'économie que procurait le système continu : nommant L la portée de chaque travée d'un pont continu et l la longueur de la travée discontinue pesant le même poids par mètre courant, il a trouvé :

Pour 3 travées	$l = 0,88 L$
Pour 5 travées	$l = 0,85 L$
Pour un nombre infini	$l = 0,80 L$.

Ainsi pour un pont à 3 travées proportionnées aux $\frac{4}{5}$, la continuité donne une économie théorique de 49 % en ce qui concerne la charge morte, et 16 % en ce qui concerne la surcharge.

Voilà des chiffres permettant d'apprécier grosso-modo l'économie du système continu, toutefois nous devons ajouter que M. GAUDARD a supposé que le pont discontinu était à brides parallèles comme le continu, or aujourd'hui les discontinus se font d'après des types dérivés du Bowstring, avec grande hauteur relative au milieu, tels sont les ponts hollandais (voir tome II) et ces types quoique discontinus ne sont pas plus coûteux que les ponts continus, et comme ils ont pour grand avantage d'être calculables avec beaucoup plus de certitude, on peut dire qu'en règle générale le pont continu n'est à conseiller que là où nécessairement il faut avoir recours au lançage pour la mise en place.

* * *

15. Surcharge partielle. — Dans ce qui précède nous avons établi nos maxima en supposant la surcharge recouvrant des travées entières ainsi que dit au n° 4, on peut se demander si la surcharge partielle de l'une ou l'autre travée ne donnerait pas en certaines sections des maxima plus grands que ceux que nous avons trouvé,

nous traitons cette question par le calcul graphique au chapitre suivant, nous y verrons que la surcharge partielle donne quelquefois en certaines sections des effets plus grands que la surcharge complète, toutefois la différence est faible et dans la majorité des cas la méthode approximative par surcharges complètes est amplement suffisante.

* * *

16. Charges locales. — Il peut se présenter le cas où dans l'étude d'un pont ou d'une poutre quelconque on veuille se rendre compte de l'effet d'une ou plusieurs charges locales.

Soit (FIG. 17) deux travées détachées d'une poutre continue quelconque.

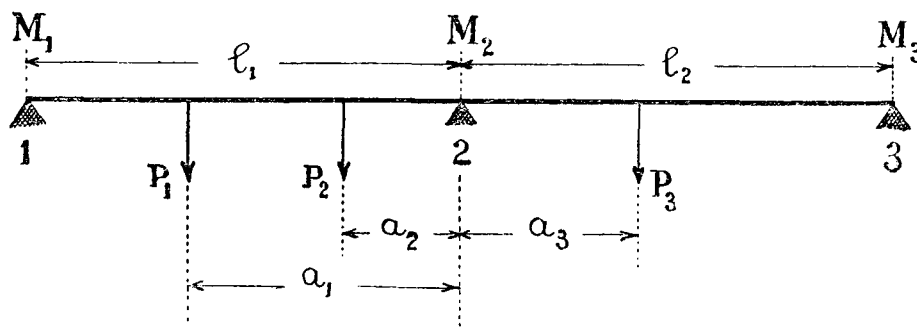


FIG. 17.

Appuis de niveau, section constante; nous faisons abstraction du poids mort et ne considérons que les charges locales $P_1 P_2 P_3$; nous appliquons la formules (10) du n° 3 ci-avant :

$$l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 = 2l_1 \mu_2 + l_2 \mu_3 - \frac{6}{l_1} \int^{l_1} \mu x dx - \frac{6}{l_2} \int^{l_2} \mu (l_2 - x) dx.$$

Pour la travée l_1 le moment μ dû à P_1 a pour valeur $[P_1 (x - l_1 + a_1)]$ et son intégrale est à évaluer de $(l_1 - a_1)$ à l_1 ; le moment μ dû à P_2 est $[P_2 (x - l_1 + a_2)]$ et son intégrale est à évaluer de $(l_1 - a_2)$ à l_1 .

Pour la travée l_2 le moment μ dû à P_3 a pour valeur $[P_3 (x - a_3)]$ et son intégrale est à évaluer de a_3 à l_2 .

Effectuant ces opérations on trouve :

$$M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = P_1 \frac{a_1}{l_1} (l_1 - a_1) (2l_1 - a_1) + \\ + P_2 \frac{a_2}{l_1} (l_1 - a_2) (2l_1 - a_2) + P_3 \frac{a_3}{l_2} (l_2 - a_3) (2l_2 - a_3).$$

Chaque couple de travées donnera une équation analogue, et la détermination des moments sur les appuis et des diagrammes se fera en suivant exactement la même marche que celle indiquée ci-dessus pour les charges continues uniformes.

Si le pont ne se compose que de deux travées, ce qui est le cas des ponts tournants, la formule ci-dessus devient :

$$2M_2(l_1 + l_2) = P_1 \frac{a_1}{l_1} (l_1 - a_1) (2l_1 - a_1) + P_2 \frac{a_2}{l_1} (l_1 - a_2) (2l_1 - a_2) + P_3 \frac{a_3}{l_2} (l_2 - a_3) (2l_2 - a_3).$$

§ 3. Cantilever

17. — Les avantages d'économie de matière et de facilité de montage des ponts continus se retrouvent encore dans les ponts *cantilever*, aussi nommés : *Ponts à intersections*, *Ponts à encorbellements*, *Ponts à consoles* et enfin *Ponts-grue*, cette dernière appellation est cependant tout-à-fait impropre.

Les cantilever sont en réalité des ponts mi-continus, ils ont sur les continus l'avantage de n'être pas affectés par un tassement des appuis et aussi d'être calculables par la statique seule.

Si le pont continu à 3 travées dont le diagramme de la charge uniforme complète est donné PL. I en A est remplacé par le pont mi-continu de la FIG. 18 ci-dessous, pont composé d'une travée centrale continue sur les deux piles D et les dépassant de quantités DB qui forment consoles ou encorbellements sur lesquels reposent librement les deux travées extrêmes AB, ce pont mi-continu aura pour la charge complète le même diagramme que celui A de la PL. I pourvu que la distance AB de la FIG. 18 soit la même que celle *ab* de

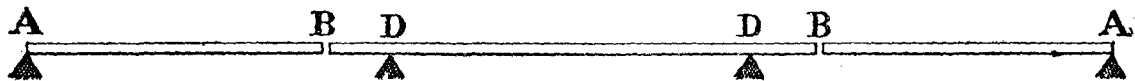


FIG. 18.

la PL. I, sous l'action des surcharges variables le diagramme enveloppe des maximum de ce pont mi-continu sera peu différent de celui du pont continu, en somme donc il exigera très sensiblement la même

quantité de matière; voir à ce sujet un mémoire de M. GAUDARD inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées* de mars 1891; nous voyons que la discontinuité qui existe aux points B de la FIG. 18 permet de calculer les diagrammes de ce pont par la seule statique sans aucune intervention de l'équation des déformations, donc calcul plus certain et en outre pour les poutres indifférence complète à la dénivellation des appuis.

Au lieu de placer les points d'intersection dans les travées extrêmes, comme en la FIG. 18, on peut les placer dans la travée du milieu ainsi que l'indique la FIG. 19, ce sont surtout des considérations

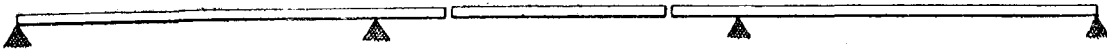


FIG. 19.

de montage qui fixent le choix entre ces deux dispositifs, ainsi dans le cas de la FIG. 19 les travées de rive étant montées sur échafaudage (ce qui est généralement possible pour les travées d'extrémité) la travée centrale peut être montée sans échafaudage par encorbellement sur les travées d'extrémité qui font contre-poids.

Dans le cas de travées multiples on emploie un agencement comme indiqué par la FIG. 20, c'est celui adopté pour le projet de

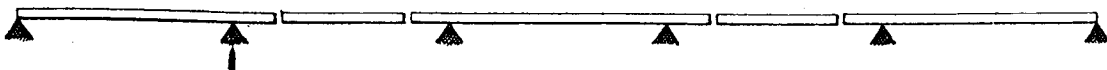


FIG. 20.

pont sur *La Manche* dont les travées ont alternativement 500 et 300 mètres, ce sont naturellement celles de 500 qui ont la double intersection. Ces points mi-continus ont généralement leurs longerons à hauteur variable à la façon des bowstrings.

Nous devons, à ces quelques indications sommaires, borner ce que nous voulions dire en ce moment du système *cantilever* qui aujourd'hui est le système en faveur pour les grandes portées, le fameux pont du *Forth* est un *cantilever*.

Pour quelques détails complémentaires sur les *cantilever* voir notre Tome II au chap. XIV.

§ 4. Lignes d'influence.

18. — Soit (FIG. 21) une charge locale P franchissant une travée AB simplement appuyée à ses extrémités, le diagramme des moments fléchissants maxima est la parabole AEB .

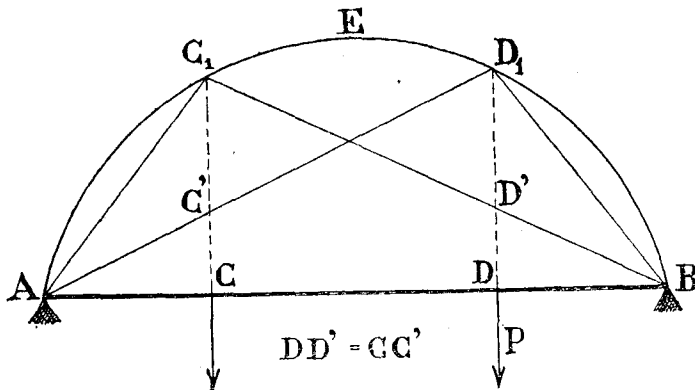


FIG. 21.

Pour la charge en D le diagramme est AD_1B , pour la charge en C il est AC_1B et le moment en D est DD' , or $DD' = CC'$, d'où la conclusion : le triangle AD_1B est le diagramme des moments se produisant en la section D lorsque la charge P

franchit la travée, ce diagramme porte le nom de *ligne d'influence des moments* en la section D pour le poids P franchissant la travée, l'ordonnée de cette ligne au droit de la position de P donne la valeur du moment fléchissant en la section D .

On démontrerait aisément que AD_2D_3B (FIG. 22) est la *ligne d'influence des efforts tranchants* en la section D pour le poids P franchissant la travée.

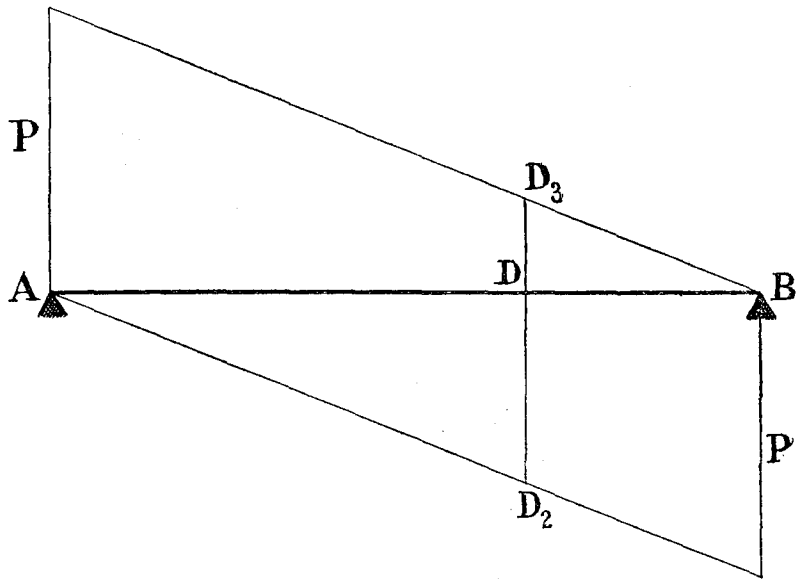


FIG. 22.

* * *

On utilise les *lignes d'influence* pour donner plus de précision au calcul des ponts.

Il y a des administrations (notamment l'administration française)

qui pour le calcul des ponts et notamment des ponts continus imposent de tenir compte des convois types réels et ne permettent pas de les remplacer par la charge uniforme équivalente, donc imposent de calculer les effets exacts produits en chaque section déterminée par chacune des charges locales dont se compose le train type, pour résoudre ce problème il faut recourir aux diagrammes spéciaux qui portent le nom de *lignes d'influence*.

Nous renvoyons pour cette question aux ouvrages ci-dessous :

Calcul des Ponts métalliques à une ou plusieurs travées par la méthode des lignes d'influence par MM. Cart et Portes, ingénieurs, Paris, Baudry.

Nouveau tracé des lignes d'influence des Moments dans une poutre continue par M. Langlois. — Mémoires de la Société des Ingénieurs civils de France, mars 1896, p. 309.



CHAPITRE II

THÉORIE GRAPHIQUE DES POUTRES CONTINUES (I)

§ 1. Tracé de l'élastique d'une poutre sur deux appuis avec ou sans encastrement

19. Théorie générale. — Soient (FIG. 23) deux points A et B dont la distance horizontale est l , ces deux points sont à des niveaux quelconques, un fil parfaitement flexible et suspendu à ces points, il porte une charge verticale dont l'intensité variable peut être représenté par les ordonnées de la courbe ab rapportée à l'horizontale A_1B , soit p l'intensité de cette charge en une section ayant pour abscisse x .

Le fil prend une courbure déterminée qui en un point intermédiaire C a nécessairement un élément horizontal ; soient l_1 et l_2 les distances horizontales AC et CB.

Le fil exerce sur A une réaction dont les deux composantes sont suivant l'horizontale la force H, suivant la verticale celle V_1 .

Sur le point d'attache B les composantes de la réaction sont H et V_2 .

Nous avons :

$$V_1 = \int_A^C p dx \quad V_2 = \int_C^B p dx.$$

Ainsi que dit ci-dessus p est une fonction de x caractérisée par la courbe ab rapportée à l'horizontale A_1B .

ACB est une courbe funiculaire que l'on peut tracer graphiquement, en effet, considérons isolément le tronçon AC, c'est un système

(1) Nous suivons surtout dans l'exposé de cette théorie graphique des poutres continues l'excellent ouvrage de M. SEYRIG, « *Eléments de Statique Graphique appliquée aux constructions* » Paris, Baudry.

Voir aussi *Applications de la Statique Graphique* par M. Koechlin. Paris, Baudry.

articulé maintenu en A par les composantes H et V_1 , en C par H , et portant intermédiairement une charge verticale continue ; groupons

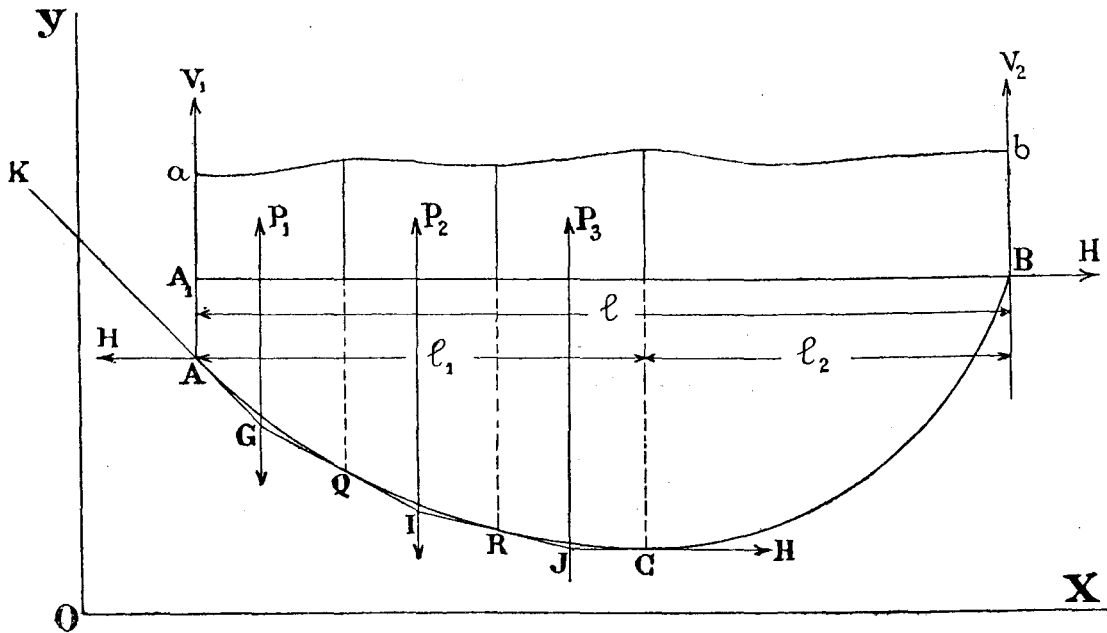


FIG. 23.

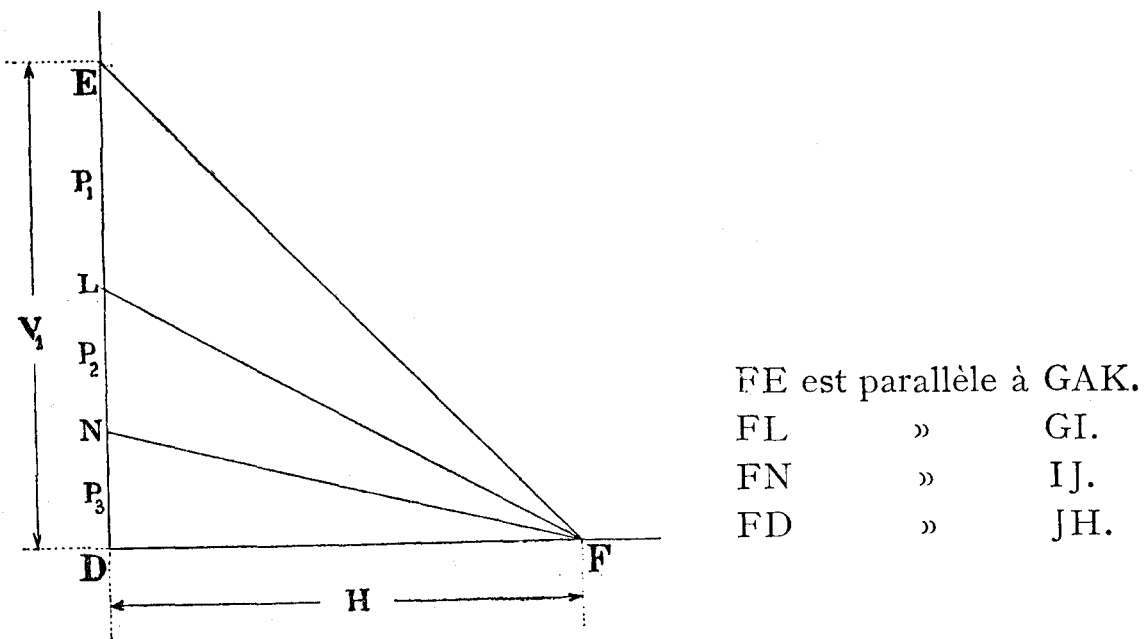


FIG. 24.

cette charge continue en trois charges locales P_1 , P_2 et P_3 , nous avons :

$$P_1 + P_2 + P_3 = \int_A^C p dx$$

Ces 3 charges locales sont appliquées au centre de gravité des

surfaces $\int p dx$ qui les représentent, la substitution de ces charges locales à la charge continue ne change rien aux valeurs de H et V_1 , quant au fil AC il prend une forme polygonale au lieu de la forme courbe due à la charge continue.

Le système articulé AC est en équilibre sous l'action des six forces $HV_1P_1P_2P_3H$; le polygone de ces forces se ferme, c'est celui $FDEDF$ (FIG. 24).

Nous partons du point A et prenant le point F comme pôle nous traçons le polygone funiculaire de ces six forces, c'est le polygone $AGIJC$, ce polygone présente les propriétés suivantes :

1^o Son côté GAK (parallèle à FE) est tangent en A à la courbe funiculaire AC .

2^o Son côté GI qui est parallèle à FL est tangent en Q à la même courbe, le côté IJ parallèle à NF est tangent en R , enfin le dernier côté JC parallèle à FD est tangent en C à la même courbe AC .

Le côté GAK est tangent en A à la courbe funiculaire, en effet ce côté représente la direction et la position de la résultante de toutes les forces qui agissent sur le système articulé depuis A jusque C , or l'élément de courbe en A représente la direction et la position de la même résultante, donc il doit se confondre avec GAK , c'est-à-dire que ce côté est tangent à la courbe en A .

Même démonstration pour GI tangent en Q , etc.

Le polygone funiculaire $AGIJC$ correspondant aux trois forces $P_1P_2P_3$ est donc un polygone enveloppe de la courbe funiculaire ; si on décompose le poids réparti sur la longueur l en un plus grand nombre de charges locales, le polygone en résultant serrera de plus près la courbe funiculaire et à la limite il se confondra avec elle.

Voilà donc comment graphiquement peut se déterminer la courbe funiculaire ; le mode de génération de cette courbe montre que la tangente en un point quelconque Q a pour valeur $\frac{LD}{DF}$ donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_Q^c p dx}{H}$$

C'est l'équation différentielle de la courbe funiculaire ACB , la dérivant on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H}$$

qui est une autre équation différentielle de la même courbe, équation dans laquelle H est une constante et p une constante ou une variable fonction de x .

Ces préliminaires posés nous pouvons passer à l'étude de l'élastique des pièces fléchies.

* * *

20. Soit (FIG. 25) AB une pièce de métal reposant en A et B , supports libres ou supports avec encastrement partiel ou complet, cette pièce porte des charges quelconques agissant par flexion et de ce chef

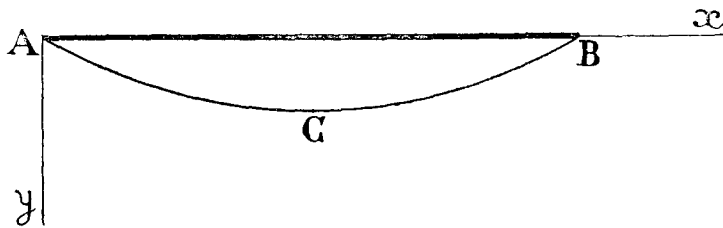


FIG. 25.

elle prend une inflexion ACB , en vertu de la raideur de la pièce cette inflexion est une courbe continue (l'élastique) qui, rapportée à deux axes rectangulaires dont l'un est parallèle à l'axe primitif de la barre (c'est-à-dire son axe avant flexion), a pour équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

équation exactement de même structure que celle de la courbe funiculaire dont question ci-dessus et qui par conséquent peut se construire graphiquement de la même façon.

L'Elastique est donc un genre de courbe funiculaire : si la pièce fléchie est à section constante on fera, pour le tracé de l'Elastique, jouer aux moments fléchissants M le rôle des p , et à EI le rôle de H ; si la pièce est à section variable on prendra pour les p les valeurs $\frac{M}{I}$ et pour H la valeur de E .

Passons à des exemples.

§ 2. Elastique dans le cas d'Appui sans encastrement.

21. Charge uniforme. — Soit à tracer la courbe élastique d'une poutre à section constante de 20 mètres de portée chargée uniformé-

ment à raison de mille kilogs par mètre courant (FIG. 26, PL. III), appuis sans encastrement.

Nous prenons le mètre comme unité de longueur, et nos tracés sont exécutés à raison de 5 millimètres par mètre.

Le moment d'inertie de la poutre est :

$$I = 0,004$$

d'où $EI = 20.000.000.000 \times 0,004 = 80.000.000$

Le maximum des moments fléchissants est : $\frac{1000 \times 20^2}{8} = 50.000$ kilogrammèt.; nous traçons la parabole des moments à l'échelle de 1 millimètre pour mille kilogrammètres (FIG. 27); la surface comprise entre cette parabole et l'horizontale AB représente la surface des p (FIG. 23) dans l'étude ci-avant de la courbe funiculaire, cette surface est $\int M dx$ tout comme dans le cas de la courbe funiculaire proprement dite elle était $\int p dx$; nous subdivisons cette surface continue en dix surfaces trapézoïdales partielles de 2 mètres de largeur uniforme (FIG. 27) la valeur de chacune de ces surfaces est donnée ci dessous :

9400 × 2 mètr.	=	18800
25400 × 2	=	50800
37000 × 2	=	74000
45000 × 2	=	90000
49000 × 2	=	<u>98000</u>
Total		331.600

Ces surfaces partielles représentent les charges locales qui dans notre théorie ci-avant (n° 19) remplaçaient la charge continue.

Ces surfaces sont donc des poids fictifs appliqués au centre de gravité de chaque trapèze, la position de ce centre de gravité se détermine par un tracé spécial très simple, et en définitive la courbe élastique est la courbure funiculaire d'un fil fixé en A et B (FIG. 28), maintenu en ces points par deux forces horizontales $EI = 80.000.000$ et portant intermédiairement la série de charges locales trouvées ci-dessus et que nous indiquons sur la FIG. 28, ces charges donnent aux points A et B une réaction verticale égale à 331.600.

Nous traçons FIG. 29 le polygone des forces de la FIG. 28 : pour cela nous devons tout d'abord choisir une échelle, nous remarquons

que les quantités $EI = 80.000.000$ et les charges verticales sont exprimées en fonction d'unités de même nature, donc doivent être tracées à la même échelle, en effet E exprime des kilogs par unité de surface donc des kilogs divisés par une longueur au carré, I est fonction d'une longueur à la 4^e puissance, donc EI exprime des kilogs multipliés par une longueur au carré, d'autre part les charges fictives sont des moments multipliés par une longueur, or un moment est une force en kilogs multipliée par une longueur, donc les charges fictives sont des kgs multipliés par une longueur au carré et par conséquent elles sont de même nature que EI ; nous exprimons les charges fictives à l'échelle de un millimètre pour 3000 unités, ce qui dans le polygone des forces (FIG. 29) nous donne pour la réaction verticale 331.600 la valeur 110.5 millimètres, la réaction horizontale EI doit être représentée par

$$\frac{80.000.000}{3.000} = 26667 \text{ millimètres}$$

et le polygone funiculaire en résultant étant tracé sur la FIG. 28 où l'échelle des longueurs est $\frac{I}{200}$ donnera les flèches de la poutre à la même échelle, c'est-à-dire absolument imperceptibles, nous nous butons donc ici à une double impossibilité : d'abord porter sur notre tracé la longueur 26667 millimètres pour représenter EI , en outre mesurer des flèches à l'échelle de $\frac{I}{200}$, on tourne ces impossibilités en remarquant que si l'échelle des réactions horizontales EI est prise n fois celle des charges verticales, le tracé de la FIG. 28 donnera des dimensions verticales qui seront relativement n fois plus grandes que celles horizontales, c'est-à-dire que les flèches seront données à l'échelle $\frac{n}{200}$, si donc on prend $n = 200$, c'est-à-dire si sur le polygone des forces de la FIG. 29 la réaction horizontale est tracée à l'échelle de un millimètre pour $200 \times 3000 = 600.000$ unités, le polygone funiculaire de la FIG. 28 donnera les flèches en vraie grandeur, effectuons ce tracé :

$$EI = \frac{80.000.000}{200 \times 3000} = 133.3 \text{ millimètres}$$

c'est là une longueur très aisée à porter sur le dessin, elle détermine le point O de la FIG. 29, prenant ce point pour pôle nous traçons sur la FIG. 28 le polygone funiculaire correspondant et nous obtenons

ainsi la courbe ACB dont les ordonnées donnent en vraie grandeur les inflexions prises en chaque point de la poutre que nous étudions, nous trouvons pour la flèche maximum au milieu de la poutre la valeur 26 millimètres, calculant cette flèche directement par la formule connue nous trouvons également 26 millimètres :

$$\frac{5 pl^4}{384 EI} = \frac{5 \times 1000 \times 20^4}{384 \times 80,000,000} = 0 \text{ mèt. } 026.$$

Voilà une vérification.

* * *

22. Si le moment d'inertie est variable, les tracés ci-dessus se feront d'une façon absolument semblable sauf qu'au lieu de prendre comme charges fictives verticales les $\int M dx$ on prendra $\int \frac{M}{I} dx$, et la réaction fictive horizontale, celle qui détermine la distance polaire, sera tout simplement E.

* * *

23. Charge locale. — Prenons un autre exemple.

Soit à tracer la courbe élastique d'une poutre à section constante de 20 mètres de portée chargée localement, ainsi que l'indique la FIG. 30, d'un poids de 12000 kgmes, nous faisons abstraction du poids propre de la poutre.

$$I = 0,004$$

$$EI = 80,000,000$$

Nous traçons (FIG. 31) le diagramme des moments fléchissants.

Les échelles sont : 5 millimètres par mètre et 1 millimètre pour 1000 kilogrammètres. Nous subdivisons la surface du diagramme en dix surfaces trapézoïdales partielles de 2 mètres de largeur uniforme, la valeur de ces surfaces est :

$$3600 \times 2 = 7200$$

$$11000 \times 2 = 22000$$

$$18000 \times 2 = 36000$$

$$25200 \times 2 = 50400$$

$$32500 \times 2 = 65000$$

$$39800 \times 2 = 79600$$

$$46800 \times 2 = 93600$$

$$42000 \times 2 = 84000$$

$$25200 \times 2 = 50400$$

$$8400 \times 2 = 16800$$

Ce sont les charges locales fictives dont le point d'application est

au centre de gravité de chaque trapèze, nous les figurons en vraie position sur la poutre de la FIG. 32; ces charges donnent en A une réaction verticale de 218,000 et en B de 287,000; la réaction horizontale est 80,000,000.

Nous construisons (FIG. 33) le polygone des forces en prenant pour échelle des charges verticales 1 millimètre pour 3000 et pour la réaction horizontale 1 millimètre pour $200 \times 3000 = 600,000$.

Le pôle est en o, la distance polaire est $\frac{80,000,000}{600,000} = 133,3$ millim.

Le polygone funiculaire tracé sur la FIG. 32 nous donne les flèches en vraie grandeur, il nous indique que la flèche au point d'application de la charge de 12000 kgmes est de 17,7 millimètres, celle maximum est de 20,1 millimètres et se produit à 11 mètres de l'appui; si on applique les formules connues on trouve identiquement les mêmes résultats.

* * *

24. Il est à remarquer qu'il y a en chaque point une relation entre la tangente à la courbe élastique et le moment fléchissant qui agit sur la poutre en ce point, soit, par exemple, le point G de la poutre AB (FIG. 31 et 32), la tangente à l'élastique en ce point est G_1A_1 qui est le prolongement du côté n° 5, cette tangente est coupée en K par le côté n° 1, c'est à dire la tangente en A à l'extrémité de l'élastique, le point K est sur la verticale du centre de gravité de la surface de charge GG_2A qui a pour valeur la ligne NN_1 de la FIG. 33; les triangles AA_1K et NN_1O sont semblables, on a donc :

$$(1) \quad \frac{AA_1}{KK_1} = \frac{NN_1}{OO_1}$$

la quantité NN_1 est une fonction connue du moment fléchissant $M = GG_2$ qui agit en G, et l'équation ci-dessus permet donc de déterminer M; dans le cas des FIG. 30 et 31 on a :

$$KK_1 = \frac{2}{3} AG$$

et vu les échelles employées on a :

$$NN_1 = \frac{M \times \frac{200 AG}{2 \times 1000}}{3000} = \frac{M \times AG}{30000}$$

substituant dans l'équation (1) on a :

$$\frac{3 AA_1}{2 AG} = \frac{M \times AG}{30000 OO_1}$$

d'où
$$M = \frac{90000 AA_1 \times OO_1}{2 AG^2}$$

remplaçant AA_1 , OO_1 et AG par leurs valeurs en millimètres relevées sur les FIG. 32 et 33, on a :

$$M = \frac{90000 \times 7,5 \times 133,3}{2 \times 40 \times 40} = 28130 \text{ kilogrammètres}$$

ce qui est précisément la valeur du moment en G.

§ 3. Tracé de l'élastique d'une poutre sur appuis encastrés.

25. Dans ce qui précède nous avons toujours supposé que l'appui de nos poutres était un appui simple, nous allons étudier le cas où cet appui serait accompagné d'un encastrement complet ou partiel, et nous entrons ainsi dans l'étude des poutres continues dont précisément l'effet est de créer, pour chacune des travées, un certain encastrement à chaque extrémité.

Charge uniforme. — Soit donc AB (FIG. 34) une poutre à section constante de $l = 20$ mètres de portée, chargée de 1000 kgmes par mètre courant et en outre sollicitée en A par un moment d'encastrement $M_a = 30000$ kilogrammètres dirigé en sens inverse des aiguilles d'une montre, et en B par un moment $M_b = 12000$ kilogrammètres dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les moments fléchissants produits par la charge sont représentés par les ordonnées de la courbe parabolique ACB, ceux dûs au moment d'encastrement M_a sont représentés par les ordonnées du triangle AA_1B et ceux dûs au moment d'encastrement M_b sont représentés par les ordonnées comprises dans le triangle BB_1A_1 (FIG. 35).

Le moment fléchissant M_x en un point quelconque, à la distance x de l'appui, a pour valeur

$$M_x = y_1 - (y_2 + y_3)$$

en définitive la courbe des moments fléchissants est la parabole $A_1C_1B_1$ obtenue en défalquant des ordonnées ACB celles du trapèze AA_1B_1B

Le tracé de l'élastique de la poutre dont nous venons de préciser l'état de sollicitation se ferait exactement comme indiqué précédemment sauf à tenir compte que les charges fictives $[\int M dx]$ sont les unes dirigées vers le bas, les autres vers le haut, ainsi que l'indiquent les trois surfaces AA_1A_2 , $A_2C_1B_2$ et BB_1B_2 du diagramme $A_1C_1B_1$.

Pour l'étude des poutres continues il importe peu d'avoir le tracé de l'élastique même, ce qu'il importe, c'est d'avoir l'inclinaison de ses deux tangentes d'extrémité en A et B, c'est à cela que nous allons limiter notre recherche, car nous pourrons ensuite établir (par une marche analogue à celle suivie dans le n° précédent) une relation entre ces inclinaisons et les moments fléchissants en A et B.

La charge totale fictive continue représentée par la surface comprise entre AB et $A_1C_1B_1$ peut être remplacée par trois charges locales qui sont celles :

$$P_1 = \text{surf. ACB} = \frac{2}{3} M_{\max} \times l = \frac{2}{3} \times 50000 \times 20$$

$$P_2 = \text{surf. AA}_1\text{B} = M_a \times \frac{1}{2} l = 30000 \times \frac{1}{2} \times 20$$

$$P_3 = \text{surf. BB}_1\text{A}_1 = M_b \times \frac{1}{2} l = 12000 \times \frac{1}{2} \times 20$$

P_1 est dirigé vers le bas et est appliqué au milieu de la portée l .

P_2 est dirigé vers le haut et est appliqué au centre de gravité du triangle AA_1B , donc au tiers de AB à partir de A.

P_3 est dirigé vers le haut et est appliqué au tiers de AB à partir de B.

Tout d'abord nous devons déterminer les deux réactions verticales P_a et P_b provoquées en A et B par ces trois forces (FIG. 35).

Cette détermination peut se faire par un procédé quelconque, on obtient :

$$P_a = \frac{1}{2} P_1 - \left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_3 \right) = 93333 \text{ dirigé vers le haut}$$

$$P_b = \frac{1}{2} P_1 - \left(\frac{1}{3} P_2 + \frac{2}{3} P_3 \right) = 153333 \text{ dirigé vers le haut.}$$

La poutre que nous étudions est donc sollicitée comme indiqué par la FIG. 36.

La réaction horizontale EI est inconnue, pour l'étude que nous faisons maintenant il est inutile de la déterminer.

Nous construisons (FIG.37) un polygone des forces analogue à celui

de la FIG. 33, nous prenons pour la distance polaire (déterminée par la valeur de EI) une distance quelconque O_1O sur l'horizontale et ainsi nous avons le pôle O.

Le polygone funiculaire tracé sur la FIG.36 nous donne l'inclinaison des tangentes en A et B, ou plutôt nous donne une valeur proportionnelle à la véritable inclinaison.

Les droites AD et BF sont les tangentes en A et B parce que ce sont les résultantes de toutes les forces fictives appliquées sur l'ensemble de la poutre AB; nous avons à étudier les propriétés de ces tangentes.

* * *

26. Définitions. — Donnons tout d'abord quelques définitions :

Les verticales de P_2 et P_3 qui sont des lignes passant au tiers de la longueur AB de la poutre se nomment *trisectrices*.

La surface ACB (FIG. 35) qui mesure la valeur de P_1 se nomme *surface de charge*.

La verticale de P_1 (qui, dans le cas particulier de la surcharge uniforme complète, passe par le milieu de la poutre) se nomme la *verticale de la surface de charge*.

Les lignes DG et FG (FIG. 36) qui se croisent sur la verticale de la surface de charge se nomment *lignes croisées*.

* * *

27. Echelles des tracées. — Nous venons de voir comment, connaissant les moments d'encastrement de la poutre et la charge qu'elle porte, on peut tracer les tangentes sur les appuis; le problème inverse est à résoudre : connaissant les tangentes sur les appuis, déterminer la valeur des moments d'encastrement.

Nous connaissons donc les deux directions AD et BF de la FIG. 36 ainsi que la valeur de la surface de charge P_1 et naturellement celle de EI, il y a à déterminer M_a et M_b .

Nous remarquons que si à partir du pôle O de la FIG. 37 nous menons sur la distance polaire OO_1 une longueur égale à $\frac{l}{6}$ et si nous tirons une verticale HH_1 limitée aux deux rayons qui aboutissent aux extrémités de P_1 , cette verticale sera précisément égale aux longueurs DD_1 ou FF_1 (FIG. 36) que les lignes croisées interceptent sur les

trisectrices, la longueur HH_1 dépend uniquement de P_1 et de EI , c'est-à-dire qu'elle est la même quelle que soit la position relative que dans notre tracé nous donnons à ces deux quantités, donc sans connaître ni M_a ni M_b nous pouvons déterminer la valeur de HH_1 et la portant sur la FIG. 36 à partir de D en DD_1 et de F en FF_1 nous avons le tracé exact des lignes croisées et par conséquent le tracé complet du polygone funiculaire $ADGFB$, et ayant ce tracé nous pouvons déterminer les valeurs de M_a et M_b : pour cela prolongeons les lignes croisées jusqu'aux verticales des appuis en D_2 et F_2 , les triangles DAD_2 et OLJ sont semblables, d'où

$$(1) \quad \frac{LJ}{OO_1} = \frac{AD_2}{KA}$$

LJ représente P_2 ou la surface AA_1B (FIG. 35), c'est un nombre M_a de kilogrammètres multiplié par $\frac{1}{2} l$ exprimé en mètres, le produit est figuré de L en J à raison de 1 millimètre pour m unités, donc :

$$\frac{\frac{1}{2} l M_a}{m} = LJ \text{ millimètres,}$$

OO_1 représente la valeur de EI exprimée en fonction du mètre, représentation qui est faite en prenant un millimètre pour m_1 unités (en réalité m_1 devrait être égal à m , mais il peut être différent, voir le n° 21),

$$\frac{EI}{m_1} = OO_1 \text{ millimètres.}$$

L'échelle des longueurs est n , c'est-à-dire que 1 millimètre pris sur le dessin représente n millimètres de la réalité.

Nous avons donc :

$$\frac{LJ}{OO_1} = \frac{\frac{\frac{1}{2} l M_a}{m}}{\frac{EI}{m_1}} = \frac{m_1}{2m} \times \frac{l M_a}{EI} = \frac{AD_2}{KA}$$

d'où

$$M_a = \frac{2mEI}{m_1 l} \times \frac{AD_2}{KA}$$

Le rapport $\frac{AD_2}{KA}$ est connu, on en prend la valeur sur le tracé de la FIG. 36, donc M_a est complètement déterminé.

Comme KA est une quantité constante (c'est le tiers de AB) on

voit que le moment fléchissant M_a sur l'appui est proportionnel au segment AD_2 déterminé par la ligne croisée sur la verticale de ce même appui.

La valeur de KA exprimée en millimètres est :

$$KA = 1000 \frac{l}{3n}$$

la valeur de l étant en mètres, substituant dans l'expression de M_a on a :

$$M_a = \frac{6 m n EI}{1000 m_1 l^2} \times AD_2$$

c'est-à-dire que AD_2 représente la valeur de M_a en prenant pour échelle 1 millimètre pour $\frac{6 m n EI}{1000 m_1 l^2}$ kilogrammètres, et BF_2 représente la valeur de M_b à la même échelle.

Voilà la propriété des tangentes combinées avec les lignes croisées : elles déterminent sur la verticale des appuis des segments AD_2 et BF_2 qui représentent à une échelle connue les moments d'encastrement sur ces appuis.

Ainsi, pour les FIG. 36 et 37, on a :

$$m = 10000 \quad n = 200$$

OO_1 qui représente la valeur 80,000,000 de EI , a une longueur de 64 millimètres d'où $m_1 = \frac{80,000,000}{64} = 1,250,000$.

Nous avons donc :

$$\frac{6 m n EI}{1000 m_1 l^2} = \frac{6 \times 10,000 \times 200 \times 80,000,000}{1000 \times 1,250,000 \times 400} = 1920$$

c'est-à-dire que chaque millimètre de AD_2 et BF_2 représente 1920 kilogrammètres, voilà donc les valeurs de M_a et M_b qui sont déterminées.

* * *

28. — On remarquera qu'en vertu de l'équation (1) ci-dessus, le produit

$$OO_1 \times AD_2 = LJ \times KA$$

est en réalité indépendant de I puisque $LJ \times KA$ en est indépendant, or :

$$OO_1 \times AD_2 = \frac{EI}{m_1} \times AD_2$$

donc les valeurs de M_a et M_b dont les expressions sont données ci-dessus sont aussi indépendantes de la valeur du moment d'inertie constant I , c'est-à-dire indépendantes de la section de la poutre, en d'autres termes indépendantes de la distance polaire O_1O que l'on prend pour exécuter les tracés; cela découle encore de cette considération que l'échelle m_1 des valeurs de EI peut être prise quelconque, donc la distance O_1O qui représente $\frac{EI}{m_1}$ peut être prise quelconque sans modifier les valeurs de M_a et M_b , désignant cette distance par δ exprimé en millimètres, nous avons :

$$M_a = \frac{6mn\delta}{1000l^2} \times AD_2.$$

Puisque δ est quelconque nous pouvons le prendre égal à la longueur AB des FIG. 35 et 36,

$$\delta = AB = \frac{1000l}{n}$$

l étant exprimé en mètres, dans ce cas les expressions de M_a et M_b deviennent :

$$M_a = \frac{6m}{l} \times AD_2 \qquad M_b = \frac{6m}{l} \times BF_2$$

c'est-à-dire que chaque millimètre de AD_2 et BF_2 représente $\frac{6m}{l}$ kilogrammètres, l étant bien entendu exprimé en mètres.

Si on prend $\delta = \frac{AB}{2}$ alors $M_a = \frac{3m}{l} \times AD_2$, chaque millimètre de AD_2 représente $\frac{3m}{l}$ kilogrammètres; or, en ce qui concerne les moments d'encastrement M_a ou M_b , le chiffre m représente précisément un nombre de kilogrammètres n_1 multiplié par $\frac{l}{2}$, d'où :

$$\frac{3m}{l} = \frac{3n_1 \frac{l}{2}}{l} = \frac{3}{2} n_1$$

donc chaque millimètre de AD_2 représente $\frac{3}{2} n_1$ kilogrammètres.

Si le moment maximum $FC = M$ (FIG. 35) de la charge uniforme est tracé à la même échelle, il aura une longueur :

$$FC = \frac{M}{\frac{3}{2} n_1} = M \times \frac{2}{3n_1} \text{ millimètres,}$$

d'autre part la ligne JK (FIG. 37) qui sur le polygone des forces représente la surface de charge ACB de la FIG. 35 a pour valeur

$$JK = \frac{M \times \frac{2}{3} l}{m} = \frac{M \times \frac{2}{3} l}{n_1 \times \frac{l}{2}} = M \times \frac{4}{3n_1} \text{ millimètres}$$

d'où il résulte qu'avec la distance polaire $\delta = \frac{AB}{2}$ que nous avons prise, la ligne JK est précisément le double de FC, d'où la règle : dans le cas d'une poutre continue chargée uniformément sur toute la longueur de la travée considérée, si on prend comme distance polaire la demi-longueur de cette travée et comme valeur de la surface de charge le double de la flèche M de la parabole de cette surface, les segments AD₂ et BF₂ que l'on obtiendra représenteront les moments d'encastrement à la même échelle que celle employée pour tracer la parabole de la surface de charge et notamment sa flèche FC qui est le moment maximum M; nous verrons plus loin une application de cette règle.

* * *

29. — Prenons un exemple.

Supposons que dans le cas de la FIG. 34 les encastremets d'extrémité soient complets et recherchons leur valeur : les tangentes d'extrémités sont horizontales, elles ont la direction AB et viennent couper les trisectrices aux points K (FIG. 38), à partir de ces points nous portons en KK₁ la longueur HH₁ de la FIG. 37, d'où les lignes croisées et comme conséquence les segments AD₂, ces segments ont une longueur de 17 1/2 millimètres, nous avons trouvé ci-dessus au n° 27 que chaque millimètre représente 1920 kilogrammètres, nous avons donc :

$$M_a = M_b = 17,5 \times 1920 = 33600 \text{ killogrammètres.}$$

La valeur exacte calculée par la formule est :

$$\frac{pl^2}{12} = \frac{1000 \times 20^2}{12} = 33333 \text{ kilogrammètres.}$$

* * *

30. Charge locale. — Nous allons examiner le cas d'une charge

locale, soit FIG. 40 PL. II une poutre de 20 mètres de portée portant à 6 mètres de l'appui B une charge locale de 12000 kilogrammes.

Les appuis sont à encastrement partiel, on a en A, $M_a = 30000$ kilogrammètres dirigé en sens inverse des aiguilles d'une montre et en B, $M_b = 12000$ kilogrammètres dirigé dans le sens des aiguilles d'une montre. La poutre est à section constante, nous négligeons son poids.

La surface de charge est le triangle ACB de la FIG. 41, elle a pour valeur :

$$P_1 = 50400 \times 10 \text{ mètr.} = 504000$$

Cette charge fictive est appliquée au centre de gravité du triangle.

La surface de l'encastrement en A est le triangle AA_1B qui a pour valeur :

$$P_2 = 30000 \times \frac{20}{2} = 300000$$

charge appliquée au tiers de AB à partir de A.

La surface de l'encastrement en B est :

$$P_3 = 12000 \times \frac{20}{2} = 120000$$

charge appliquée au tiers de AB à partir de B.

Les réactions verticales en A et B sont :

$$P_a = 22500 \text{ dirigé vers le bas}$$

$$P_b = 106500 \text{ dirigé vers le haut.}$$

Les charges fictives portées par la poutre sont donc celles données par la FIG. 42. Nous construisons le polygone des forces FIG. 43, nous prenons une distance polaire O_1O quelconque, nous construisons sur la FIG. 42 le polygone funiculaire correspondant, ce qui donne l'inclinaison des tangentes sur les appuis.

* * *

Voyons maintenant comment, connaissant l'inclinaison de ces tangentes, on peut en déduire la valeur des moments d'encastrement.

Nous connaissons les deux directions AD et BF de la FIG. 42, ainsi que la valeur, le point d'application et la direction de la charge fictive P_1 , pour de ces données tirer les valeurs de M_a et M_b

nous devons tout d'abord attirer l'attention sur une propriété du polygone funiculaire et du polygone des forces : si sur la distance polaire OO_1 (FIG. 43) nous menons à partir du pôle O une distance égale à celle qui sur la FIG. 42 sépare la verticale P_1 des trisectrices, et tirons des verticales, nous avons que les parties HH_1 et hh_1 délimitées sur ces verticales par les rayons polaires aboutissant aux extrémités de P_1 sont précisément égales aux segments DD_1 et FF_1 (FIG. 42) que les lignes croisées déterminent sur les trisectrices ; d'autre part il est à remarquer que les valeurs HH_1 et hh_1 sont les mêmes quelque soit le point P_1 d'où la distance polaire O_1O est menée.

Connaissant cette propriété, et ayant les directions AD et BF (FIG. 42) nous pouvons tracer le polygone funiculaire $ADGFB$ au complet, et en déduire les valeurs de M_a et M_b ainsi que ci-avant nous l'avons fait dans le cas de la surcharge uniforme ; en effet prolongeons sur la FIG. 42 les lignes croisées jusqu'aux verticales des appuis en D_2 et F_2 , les triangles OLJ et DAD_2 sont semblables, d'où :

$$\frac{LJ}{OO_1} = \frac{AD_2}{KA}$$

ainsi que nous l'avons expliqué précédemment dans le cas de la charge uniforme, nous avons donc :

$$\frac{LJ}{OO_1} = \frac{\frac{1}{2m} l M_a}{\frac{EI}{m_1}} = \frac{m_1 l M_a}{2m EI} = \frac{AD_2}{KA}$$

d'où :

$$M_a = \frac{2m EI}{m_1 l} \times \frac{AD_2}{KA}$$

$$KA = \frac{1000l}{3n}$$

substituant dans M_a on a :

$$M_a = \frac{6mnEI}{1000l^2 m_1} \times AD_2$$

AD_2 est donc la valeur de M_a exprimée à l'échelle de 1 millimètre pour $\frac{6mn EI}{1000l^2 m_1}$ kgmètres ; on a de même :

$$M_b = \frac{6mnEI}{1000l^2 m_1} \times BF_2$$

On remarquera que la valeur de $\frac{EI}{m_1}$ est quelconque, ce qui prouve que la distance polaire OO_1 peut être prise ad libitum, en d'autres termes les valeurs de M_a et M_b sont indépendantes de I (bien entendu dans le cas d'une poutre à section constante) l'expression M_a peut donc être mise sous la forme

$$M_a = \frac{6mn\delta}{1000l^2} \times AD_2$$

dans laquelle δ qui représente $\frac{EI}{m_1}$ est un nombre quelconque de millim.

Désignant par M le moment maximum FC du diagramme ACB (FIG. 41), on a que la surface de charge a pour valeur $\left[M \frac{l}{2} \right]$ et sa représentation JK sur le polygone des forces, FIG. 43, a une longueur de :

$$JK = \frac{M \frac{l}{2}}{m} \text{ millimètres}$$

prenant pour distance polaire :

$$\delta = OO_1 = \frac{AB}{3} = \frac{1000l}{3n}$$

on a que chaque millimètre de AD_2 représente

$$\frac{6mn}{1000l^2} \times \frac{1000l}{3n} = \frac{2m}{l} \text{ kilogrammètres.}$$

Or, en ce qui concerne les moments d'encastrement dont la surface est représentée par un triangle AA_1B ou BB_1A_1 de hauteur l , le chiffre m de l'échelle peut être représenté par n_1 kilogrammètres à l'encastrement multipliés par $\frac{l}{2}$, $m = n_1 \frac{l}{2}$, d'où nous tirons :

$$\frac{2m}{l} = \frac{2n_1 \frac{l}{2}}{l} = n_1$$

c'est-à-dire qu'avec cette distance polaire le segment AD_2 de la FIG. 42 est égal au segment LJ de la FIG. 43, en effet $LJ = \frac{1}{2} \frac{M_a l}{m} = \frac{M_a}{n_1}$, d'où $M_a = LJ \times n_1$ tout comme $M_a = AD_2 \times n_1$; or si le diagramme de la FIG. 41 est tracé en prenant n_1 comme échelle des moments, l'ordonnée FC a pour valeur

$$FC = \frac{M}{n_1} \text{ millimètres}$$

d'autre part la longueur JK de la FIG. 20 devient :

$$JK = \frac{M \frac{l}{2}}{m} = \frac{M \frac{l}{2}}{n_1 \frac{l}{2}} = \frac{M}{n_1}$$

c'est-à-dire que cette longueur JK est précisément égale à l'ordonnée maximum du diagramme des moments, de là nous déduisons la règle : si, dans le cas d'une poutre continue à section constante chargée localement, on prend comme distance polaire le tiers de la longueur de cette travée et comme valeur de la ligne représentative de la surface de charge la longueur de l'ordonnée maximum du diagramme de la charge locale, les segments AD₂ et BF₂ que l'on obtiendra représenteront les moments d'encastrement à la même échelle que celle employée pour tracer le diagramme des moments fléchissants.

* * *

31. Comme petite application chiffrée des tracés précédents, supposons que dans le cas de la FIG. 40 les encastremets d'extrémité soient complets et recherchons leur valeur : les encastremets complets donnent pour les lignes AD et BF de la FIG. 42 une direction horizontale, nous connaissons P₁ et le portons sur la FIG. 43 à l'échelle $m = 5000$, nous prenons $o_1o = 64$ millimètres, nous déterminons HH₁ et hh₁, nous les portons sur la FIG. 45 et achevant le tracé funiculaire nous trouvons :

$$AD_2 = 16 \text{ millimètres.}$$

$$BF_2 = 37 \frac{1}{2} \text{ millimètres.}$$

L'échelle des tracés est :

$$\frac{6mn}{1000l^2} \times \frac{EI}{m_1} = \frac{6 \times 5000 \times 200}{1000 \times 20^2} \times 00_1 = \frac{6 \times 5000 \times 200}{1000 \times 400} \times 64 = 960$$

donc :

$$M_a = 16 \times 960 = 15360 \text{ kilogrammètres}$$

$$M_b = 37,5 \times 960 = 36000 \text{ kilogrammètres.}$$

Le calcul par les formules donne :

$$M_a = 15120 \quad M_b = 35280$$

* * *

32. Efforts tranchants. — Connaissant les moments d'encastrement et la charge portée par la poutre, on peut aisément déterminer les efforts tranchants.

L'effort tranchant provoqué au droit des appuis par les moments d'encastrement a pour valeur :

$$\frac{M_a \pm M_b}{l}$$

Dans le cas de la FIG. 40 on a :

$$\frac{M_a - M_b}{l} = \frac{30000 - 12000}{20} = 900 \text{ kgmes.}$$

qui agissent de bas en haut à l'appui A et de haut en bas à l'appui B.

A cet effort tranchant dû aux moments d'encastrement il faut ajouter celui provoqué par la charge que porte la poutre, dans le cas de la FIG. 40 on a de ce chef :

En A, 3600 kgmes

En B, 8400 kgmes

et en définitive les efforts tranchants réels sont :

En A, $3600 + 900 = 4500 \text{ kg.}$

En B, $8400 - 900 = 7500 \text{ kg.}$

Connaissant ces valeurs pour les appuis, le tracé du diagramme des efforts tranchants sur toute la longueur de la poutre ne présente aucune difficulté, nous ne nous y arrêtons pas ici.

Le tracé de la valeur des efforts tranchants peut se faire graphiquement en partant du diagramme $A_1C_1B_1$ de la poutre (FIG. 41) : nous portons (FIG. 44) une verticale représentant à une certaine échelle la charge 12000 kgs., des extrémités de cette verticale nous tirons deux parallèles à A_1C_1 et B_1C_1 , par le point d'intersection V de ces parallèles nous menons une horizontale qui, sur la verticale, détermine deux segments précisément égaux aux réactions des extrémités A et B de la poutre.

Un tracé analogue peut se faire dans le cas d'une charge uniforme (FIG. 35 PL. V) : $A_1C_1B_1$ est le diagramme des moments fléchissants, prenant $F_1C_2 = 2 F_1C_1$, on a que A_1C_2 et B_1C_2 sont les deux tangentes aux extrémités de la courbe qui limite le diagramme, nous tirons

(FIG. 39) une verticale représentant la charge totale 20000 kgs portée par la poutre, des extrémités de cette verticale nous menons deux parallèles aux tangentes A_1C_2 et B_1C_2 , ces parallèles se coupent en V, de ce point d'intersection nous menons une horizontale laquelle détermine sur la verticale deux segments qui précisément sont égaux aux réactions des deux extrémités A et B de la poutre.

La justification de ces tracés est donnée PL I du tome II où est établie la relation qui existe entre le tracé polaire des forces et le tracé funiculaire correspondant ou diagramme des moments fléchissants.

* * *

33. Aucune charge. — Examinons maintenant le cas d'une travée ne portant aucune charge mais soumise à ses extrémités A et B (FIG. 46, PL. VII) à des moments de flexion provenant des charges agissant sur une ou plusieurs travées voisines : nous avons 30000 kilogrammètres en A et 12000 en B et ces moments ont le sens indiqué par les flèches ; les charges fictives appliquées au tiers ont les valeurs 300000 et 120000, les réactions fictives aux appuis sont :

$$\begin{array}{ll} \text{en A} & 240\ 000 \\ \text{en B} & 180\ 000 \end{array}$$

ces charges et réactions ont le sens indiqué sur la FIG. 46.

Nous construisons le polygone des forces de la FIG. 47 et en déduisons le polygone funiculaire tracé sur la FIG. 46, polygone qui ici n'a plus que trois côtés ; les lignes croisées se confondent en une seule ligne DF ; réciproquement si nous connaissons les inclinaisons des tangentes en A et B, nous sommes à même de tracer le polygone funiculaire et d'en déduire les valeurs de M_a et M_b , nous avons en effet :

$$\frac{LJ}{OO_1} = \frac{AD_2}{KA}$$

c'est-à-dire le même rapport que précédemment, d'où nous déduisons les mêmes valeurs pour M_a et M_b :

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{6\ mn\ EI}{1000\ l^2\ m_1} \times AD_2 \\ M_b &= \frac{6\ mn\ EI}{1000\ l^2\ m_1} \times BF_2 \end{aligned}$$

* * *

Si les moments d'extrémité ont le sens et la valeur indiqués sur la FIG. 48, le polygone funiculaire se présente comme sur cette figure.

Enfin s'ils ont le sens et la valeur de la FIG. 50, il prend une autre allure qui est celle indiquée sur cette même figure, le côté intermédiaire du polygone funiculaire coupe le tiers central de la poutre au point C et ce point est précisément celui où les moments sont nuls, c'est un point d'inflexion de la fibre neutre de la poutre, nous avons à le démontrer : nous savons que le côté milieu du polygone funiculaire étant prolongé détermine sur les verticales des appuis des segments AD_2 , BF_2 qui à une certaine échelle représentent les valeurs de M_a et M_b , de là il résulte que la droite D_2B est le diagramme des moments fléchissants provoqués sur AB par M_a , et F_2A est celui de M_b , les moments fléchissants réels en chaque point sont la différence des ordonnées de ces deux diagrammes, et cette différence est précisément représentée par les ordonnées de la droite D_2F_2 , donc le point C correspond à un moment nul.

Dans le cas de la FIG. 46 le point C est imaginaire, c'est-à-dire en dehors de la travée considérée.

§ 4. Propriétés géométriques des polygones funiculaires de deux travées successives non chargées d'une poutre continue.

34. Jusque maintenant nous n'avons considéré que le cas d'une travée isolée prise dans un ensemble de travées continues, nous allons examiner le cas de deux travées successives (FIG. 52. PL. VIII). Ces travées ne portent aucune charge, elles subissent tout simplement à leurs extrémités l'effet des moments provoqués par les charges appliquées sur d'autres travées que nous ne faisons pas intervenir pour le moment.

Les moments agissant sur la travée AB sont :

$$M_a = 42500 \text{ kgmètres}, \quad M_b = 37000 \text{ kgmètres}.$$

Ces moments agissent dans le sens indiqué sur la figure.

Sur la travée BC nous avons en B un moment $M_b = 37000$ qui agit comme figuré, et en C un moment M_c dont la valeur dépend des deux précédents, c'est cette valeur que nous avons à déterminer.

Nous pouvons tracer le polygone funiculaire ADFB (FIG. 53) de la travée AB, polygone déduit du polygone des forces, FIG. 54.

Ce polygone funiculaire nous donne la direction FBH de la tangente à l'origine de la travée BC, de plus nous avons le moment en B, moment qui nous donne une charge fictive de $37000 \times 6 = 222\,000$ appliquée suivant la trisectrice de BC voisine de B, force qui d'après le sens des moments est dirigée vers le haut.

Nous traçons, FIG. 55, le canevas du polygone des forces de la travée BC, nous prenons la même distance polaire O_1O que celle de la FIG. 54 ; le rayon 3 mené de O parallèlement à FBH détermine le point *a* sur la verticale des forces, nous menons à partir de *a* vers le haut une longueur $ab = 222\,000$, le rayon *bO* nous donne la direction du côté milieu HS du polygone funiculaire cherché et le troisième côté est SC, menant le rayon *Od* parallèle à SC on a *bd* comme valeur de la charge appliquée suivant la trisectrice voisine de C, à l'échelle on trouve :

$$bd = 5000 \times 151 \text{ millimètres} = 755000$$

d'où on déduit :

$$M_c = \frac{755000}{6 \text{ mètres}} = 125833 \text{ kilogrammètres.}$$

Voilà donc comment on détermine M_c .

Maintenant nous avons à rechercher les propriétés du tracé que nous venons d'exécuter, cela nous donnera une méthode plus expéditive que celle que nous venons d'indiquer pour trouver le côté intermédiaire HS du funiculaire de la 2^{de} travée, et par conséquent pour déterminer M_c .

* * *

35. 1^{re} Propriété. Antiverticale. — Nous remarquerons que DFHS (FIG. 53) est le funiculaire de deux forces verticales qui sont $\frac{1}{2} l_1 M_b$ appliquée en F et $\frac{1}{2} l_2 M_b$ appliqué en H, la résultante de ces deux forces passe par le point d'intersection G des côtés extérieurs DF et HS de ce funiculaire, menant la verticale GJ on a :

$$\frac{1}{2} l_1 M_b \times KJ = \frac{1}{2} l_2 M_b \times LJ$$

d'où :

$$\frac{KJ}{LJ} = \frac{\frac{1}{3}l_2}{\frac{1}{3}l_1}; \quad \frac{KJ}{KJ + LJ} = \frac{\frac{1}{3}l_2}{\frac{1}{3}l_1 + \frac{1}{3}l_2}$$

et comme

$$KJ + LJ = \frac{1}{3}l_1 + \frac{1}{3}l_2$$

on a

$$KJ = \frac{1}{3}l_2$$

et

$$LJ = \frac{1}{3}l_1$$

Le point J et la verticale menée par J peuvent donc se tracer à priori, leur position dépend uniquement de la longueur des travées; cette verticale JG dont la distance aux trisectrices voisines est l'inverse des distances de l'appui B se nomme l'*antiverticale* de cet appui.

L'antiverticale est donc connue a priori ainsi que son point G d'intersection avec DN et comme le point H l'est aussi on a immédiatement la direction GHS du côté intermédiaire du funiculaire de la 2^{de} travée et par conséquent ce funiculaire est complètement déterminé.

* * *

36. 2^{de} propriété. Points homologues. — Les points N et N₁ (FIG. 53) sont, comme nous l'avons vu, ceux où sur chaque travée (celles-ci n'étant pas chargées) les moments sont nuls; d'autre part nous venons de voir que les moments sur la première travée déterminent ceux sur la seconde, on conçoit donc à priori que la position du point N commande celle du point N₁, et cela découle du fait que les côtés extérieurs du funiculaire DNFBHS se coupent en G sur l'antiverticale de l'appui B, nous avons en effet :

$$\frac{NJ}{NK} = \frac{JG}{KF}$$

$$\frac{N_1J}{N_1L} = \frac{JG}{LH}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où} \quad & \frac{N_1J \cdot NJ}{N_1L \cdot NK} = \frac{JG \cdot JG}{LH \cdot KF} \\
 & \frac{N_1J}{N_1L} = \frac{NJ}{NK} \times \frac{KF}{LH} \\
 \text{or} \quad & \frac{KF}{LH} = \frac{KB}{LB} = \frac{l_1}{l_2} \\
 \text{donc} \quad & \frac{N_1J}{N_1L} = \frac{NJ}{NK} \times \frac{l_1}{l_2} \\
 \text{d'où} \quad & N_1J = \frac{NJ \times l_1}{NJ \times l_1 + NK \times l_2} (N_1J + N_1L) \\
 & N_1J = \frac{NJ \times l_1 \times \frac{1}{3} l_1}{NJ \times l_1 + NK \times l_2}
 \end{aligned}$$

équation qui montre que connaissant la position du point N on peut en déduire celle de N₁, et cette équation est complètement indépendante de la valeur des moments qui agissent sur la travée AB, cette indépendance prouve que pour un même point N le point N₁ reste le même quelle que soit l'inclinaison du côté intermédiaire DF du funiculaire de la première travée, c'est-à-dire que si par N nous menons une droite quelconque D'F'G', si de F' nous menons F'BH' et si nous joignons G'H', cette droite coupera BC en N₁ (FIG. 53).

Le point N₁ déduit de N par la construction géométrique que nous venons d'exposer se nomme l'*homologue* de N, et la relation entre ces deux points résulte directement de ce que les lignes DF, FBH et HS des polygones funiculaires des deux travées voisines constituent le polygone funiculaire DFHS des deux charges fictives $\frac{1}{2} l_1 M_b$ et $\frac{1}{2} l_2 M_b$.

Les points N et N₁ se nomment quelquefois *points nuls*, parce que dans le cas de travées non chargées ce sont les points où les moments fléchissants sont nuls, le plus souvent cependant on les nomme *points fixes*, nous verrons ci-après au n° 40 pourquoi; nous estimons que l'appellation la plus rationnelle est celle de *points homologues*.

* * *

37. La propriété que nous venons de démontrer pour le point N et qui permet de déduire de sa position celle de son homologue N₁

existe pour n'importe quel point du plan, cette propriété est d'ailleurs purement géométrique et ne découle nullement de ce que en N et N₁ les moments sont nuls ; soit (FIG. 56) deux travées AB et BC, nous menons en K et L les deux trisectrices voisines de l'appui B et en J l'antiverticale de B, d'un point quelconque T du plan nous menons deux sécantes, l'une TFG quelconque, l'autre TB passant par l'appui B, les triangles semblables nous donnent les rapports suivants :

$$\frac{TZ}{TW} = \frac{ZG}{WF} \text{ et } \frac{RZ}{RV} = \frac{ZG}{VH}$$

d'où en divisant
$$\frac{RZ}{RV} = \frac{TZ}{TW} \times \frac{WF}{VH}$$

mais
$$\frac{WF}{VH} = \frac{l_1}{l_2}$$

d'où
$$\frac{RZ}{RV} = \frac{TZ}{TW} \times \frac{l_1}{l_2}$$

$$\frac{RZ}{RZ + RV} = \frac{TZ \times l_1}{TZ \times l_1 + TW \times l_2}$$

$$RZ = \frac{TZ \times l_1 \times ZV}{TZ \times l_1 + TW \times l_2}$$

Pour un même point T toutes les quantités du second membre de cette égalité sont constantes, donc le point R est fixe quelle que soit l'inclinaison de la sécante TFG, donc si le point T appartient au côté DNF (FIG. 53) qui précède la trisectrice voisine de l'appui B ou est situé sur le prolongement de cette droite, le point R appartient nécessairement au côté du funiculaire qui suit la trisectrice voisine de B dans la seconde travée, car pour déterminer R je puis prendre comme sécante TFG (FIG. 56) la direction DNFG de la FIG. 53.

L'expression de RZ ci-dessus montre que si le point T se déplace suivant une verticale TT₁, son homologue R se déplacera aussi suivant une verticale, ce qui revient à dire que le point R est sur la verticale passant par l'homologue de T₁.

Il est à remarquer que nous n'avons au cours de nos démonstrations pas fait appel à la circonstance que B est sur l'alignement AC des appuis, si B vient en B₁ sur la verticale de B, nous avons que l'homologue de T par rapport à B₁ vient en R₁ et ce point R₁ est sur la verticale de R, c'est-à-dire sur la verticale du point homologue de T₁.

§ 5. Trois travées dont une chargée.

38. Soient ABCD (FIG. 57, PL. IX) trois travées continues faisant partie d'un ensemble de plusieurs autres ; les appuis sont de niveau et la section est uniforme.

La travée centrale BC porte une charge quelconque, les deux voisines ne portent aucune charge mais sont encastrées en A et D du chef des autres travées.

La travée centrale a un polygone funiculaire BFGHC de quatre côtés, analogue par exemple à celui de la FIG. 36 ou de la FIG. 42.

Les travées AB et CD ont des polygones funiculaires composés de 3 côtés. Les polygones funiculaires de ces trois travées ont entre eux des relations analogues à celles trouvées ci-avant FIG. 52 à 56, savoir :

1° Le côté milieu MJ du funiculaire de la travée de gauche AB coupe le côté central gauche FG du funiculaire de BC sur l'antiverticale de l'appui B.

Il en est de même des côtés KL et GH.

2° Le point N du côté central de la travée AB a pour homologue le point N_1 où le côté central gauche FG du funiculaire de BC coupe la ligne des appuis.

De même le point N_2 du côté central du funiculaire de la dernière travée a pour homologue le point N_3 appartenant au côté central droit de la travée BC.

Il est à remarquer que les points N_1 et N_3 de la travée BC ne sont pas des points où les moments sont nuls.

3° Tout point quelconque X appartenant à la direction de MJ a pour homologue un point X_1 de la direction de FG.

Tout point sur la verticale de X a pour homologue un point sur la verticale de X_1 . La même relation existe entre les points de KL et ceux de GH.

La démonstration de ces relations qui sont d'ordre purement géométrique se fait par les mêmes raisonnements que ceux suivis ci-avant au n° 37.

De ces propriétés il résulte que si nous connaissons les points N et N_2 des travées AB et DC et la charge portée par la travée BC nous

pouvons tracer les funiculaires des trois travées, en effet : des points N et N₂ nous déduisons immédiatement la position des points N₁ et N₃, il suffit de faire les tracés géométriques, d'autre part nous connaissons la position de la verticale passant par le centre de gravité de la surface de charge de BC et la valeur P₁ de cette surface, nous portons (FIG. 58) sur une verticale une longueur RS égale à P₁ et sur l'horizontale une longueur O₁O égale à EI, nous menons les deux rayons OS et OR, nous portons sur OO₁ deux distances égales à celles qui séparent P₁ de N₁ et N₃ et par les points ainsi déterminés nous tirons deux verticales qui s'arrêtent aux rayons OR et OS, nous avons ainsi deux longueurs 1 et 2 que nous portons en N₁ et N₃ vers le bas, ce qui nous donne en V et W deux points des lignes croisées et par conséquent celles-ci sont complètement déterminées, ce sont WGN₁ et VGN₃ et les polygones funiculaires des trois travées sont complètement déterminés, car les lignes croisées nous donnent les points F et H sur les trisectrices, donc les côtés FBJ et HCK, J et K appartiennent aux côtés milieux des funiculaires de AB et CD, mais les lignes croisées nous donnent encore les points F₁ et H₁ sur les antiverticales, points qui appartiennent à la direction des côtés milieux des funiculaires de AB et CD, ces côtés milieux sont donc F₁JM et H₁KL, et les côtés extrêmes sont par conséquent MA et LD; les funiculaires étant déterminés nous avons immédiatement les moments sur les appuis, en effet on a, en vertu des formules démontrées précédemment :

$$M_a = \frac{6 mn EI}{1000 l_1^2 m_1} \times AA_1 = \frac{6 mn}{1000 l_1^2} \times OO_1 \times AA_1$$

$$M_b = \frac{6 mn EI}{1000 l_1^2 m_1} \times BB_1 = \frac{6 mn}{1000 l_1^2} \times OO_1 \times BB_1 = \frac{6 mn}{1000 l_2^2} \times OO_1 \times BB_2$$

et ainsi de suite pour les autres travées en tenant compte, bien entendu, des différentes valeurs de leur portée l .

§ 6. Deux travées chargées

39. Soient (FIG. 59 PL. IX) deux travées consécutives chargées faisant partie d'un ensemble. Nous connaissons P₁ et P₂ la valeur des surfaces de charge ainsi que la verticale de leur centre de gravité.

Les polygones funiculaires des deux travées ont entre eux des relations analogues à celles trouvées ci-avant, savoir :

1° Les côtés EF et HJ qui précèdent et suivent le côté commun FH correspondant à l'appui B se coupent en G sur l'antiverticale de l'appui B.

2° Le point N appartenant au côté EF a pour homologue le point N_1 appartenant au côté HJ.

3° Tout point L de la direction de EF a pour homologue un point L_1 situé sur la direction de HJ. Tout point M situé sur la verticale de L a pour homologue un point M_1 sur la verticale de L_1 .

La démonstration de ces propriétés est toujours la même que celle déjà donnée.

§ 7. Poutre continue dont une travée est chargée

40. Nous pouvons maintenant aborder le problème dans sa généralité : soit un pont continu de six travées (FIG. 60 PL. X), les appuis sont de niveau, la poutre est de section constante ; nous faisons provisoirement abstraction du poids mort du pont, nous allons étudier les effets de la seule surcharge ; tout d'abord nous traçons toutes les trisectrices et les antiverticales car ce sont des lignes dont nous aurons constamment besoin ; nous supposons une surcharge quelconque sur la travée 3, toutes les autres ne portent rien ; nous connaissons la surface de charge P_1 de la travée 3 et la verticale de son centre de gravité, nous prenons (pour la facilité des tracés) le pôle O sur cette verticale, nous prenons sur l'horizontale partant de O une distance polaire OO_1 quelconque (celle la mieux à notre convenance) représentant EI, et par O_1 nous menons une verticale RS qui à l'échelle choisie représente $P_1 \left[RS = \frac{P_1}{m} \right]$, nous menons les rayons OR et OS, nous avons ainsi le triangle des lignes croisées.

Il s'agit maintenant de déterminer les points que nous avons désignés par N_1 et N_3 sur la FIG. 57, ces points dérivent de leurs homologues des travées non chargées, homologues qui sont situés sur les côtés milieux des funiculaires des travées non chargées, or pour les travées extrêmes qui sur les appuis ont un moment nul, le côté milieu se confond avec le côté extérieur du funiculaire et par conséquent passe par l'appui, les points A et B de la FIG. 60 appartiennent donc au côté milieu des funiculaires des travées extrêmes, ce sont pour les

travées extrêmes les points N dont il est question dans les démonstrations ci-avant; connaissant le point A nous en déduisons par la construction graphique de la FIG. 53 le point N de la travée 2, connaissant le N de la travée 2 nous en déduisons le N₁ de la travée 3, ce point N₁ appartient à la ligne croisée de gauche du funiculaire de cette travée.

Nous partons ensuite du point B et en déduisons les N des travées 5 et 4 et finalement le N₃ de la travée 3, ce point N₃ appartient à la ligne croisée de droite du funiculaire de cette travée.

Il est à remarquer que par le fait que A et B sont des points fixes tous les N qu'on en déduit sont aussi des points fixes, c'est-à-dire des points qui ne dépendent que de la longueur des travées, c'est pourquoi ainsi que ci-avant nous l'avons dit on les intitule fréquemment *Points fixes* (voir n° 36).

Nous connaissons donc les points N₁ et N₃ de la travée chargée, nous menons les verticales de ces points, les rayons OR et OS du triangle des lignes croisées (FIG. 61) découpent sur ces verticales des segments CD et FG, nous portons CD de N₁ en D₁ et FG de N₃ en G₁, nous avons ainsi en N₁G₁ et N₃D₁ les lignes croisées en vraie position, c'est-à-dire que nous avons la portion HJK du funiculaire de la travée 3; ayant HJK on peut, appliquant les règles ci-avant, en déduire le funiculaire complet jusque A et jusque B.

Mais ce qu'il nous faut ce sont les moments sur les appuis, et le tracé nous les donne immédiatement, nous avons en effet :

$$\text{sur l'appui L} \quad M_L = \frac{6 m n}{1000 l_3^2} \times OO_1 \times LL_1$$

$$\text{sur l'appui V} \quad M_V = \frac{6 m n}{1000 l_3^2} \times OO_1 \times VV_1$$

m est l'échelle du tracé de P₁.

n est l'échelle du tracé des longueurs des travées.

l_3 est la longueur de LV en mètres.

OO₁, LL₁ et VV₁ sont des longueurs exprimées en millimètres.

M_L et M_V sont les moments en kilogrammètres.

Nous portons ces moments, à une certaine échelle sur la FIG. 62 de L en L₂ et de V en V₂, joignant L₂ au point nul N (1) de la travée 2

(1) N est ici un point de moment nul parce qu'il est dans une travée non chargée et est un point de passage du côté milieu du funiculaire de cette travée.

nous avons L_2ND le diagramme des moments fléchissants sur cette travée, et DA sera celui sur la travée 1.

Donc ADL_2 est le diagramme des moments fléchissants provoqués sur les travées 1 et 2 par la charge de la travée 3; de même $BCFV_2$ est le diagramme des moments pour les travées 6, 5 et 4; quant à la travée 3 son diagramme s'obtiendra en combinant les ordonnées de L_2V_2 avec celles du diagramme de la charge sur cette travée supposée isolée.

En définitive ADL_2ZV_2FCB est le diagramme des moments fléchissants pour l'ensemble de la poutre, et ces moments sont à la même échelle que celle de LL_2 et VV_2 .

Voilà donc complètement connus les moments développés dans les six travées par la charge agissant sur la travée 3.

§ 8. Poutre continue, toutes les travées chargées

41. Le cas d'une seule travée chargée que nous venons d'étudier constitue le problème général des poutres continues.

Pour une seconde travée chargée, on tracera un diagramme analogue à celui FIG. 62 et une simple addition algébrique donnera le diagramme dans le cas de deux travées chargées simultanément.

Et ainsi pour trois, pour quatre, pour un nombre quelconque de travées chargées, et enfin pour toutes les travées chargées.

On pourra aussi, en ne prenant dans la série des diagrammes FIG. 62 que les ordonnées de même signe, déterminer en chaque section le plus grand moment maximum (positif ou négatif) qui peut s'y produire et la répartition des charges pouvant le produire; on aura ainsi l'enveloppe des plus grands moments sur toute la longueur de la poutre continue, (voir Chap. I, n° 8).

Le cas de toutes les travées chargées n'est donc qu'un cas particulier de celui traité dans le § précédent, et de ce chef il est résolu, toutefois nous allons le traiter directement à titre d'exercice.

Soit donc (FIG. 63, PL. XI) un pont de 4 travées continues, appuis de niveau, longueurs quelconques, section constante et charge quelconque sur chaque travée. Nous tirons les trisectrices et antiverticales. Nous déterminons les deux séries F de points fixes, celle correspon-

dant au point de départ A et celle au point de départ B (1), nous tirons les verticales de ces points.

Nous connaissons pour chaque travée sa surface de charge de valeur P (voir n° 25 à 31) et la verticale de P, nous tirons ces verticales du haut en bas de la PL. XI, elles coupent les travées aux points O (FIG. 64), à partir de ces points O nous portons suivant l'horizontale et pour chaque travée la distance polaire OO_1 de valeur quelconque mais la même pour toutes car les travées ont le même moment d'inertie I, sur notre tracé nous avons pris pour la distance polaire celle Oa distance de O à l'appui A sur la première travée; aux points a ou O_1 ainsi déterminés nous menons des verticales et prenons sur ces verticales une longueur représentant à une certaine échelle m le P de la travée correspondante, cette longueur P est prise comme on veut sur la verticale (voir Chap. II, § 3) et on mène de O les rayons aux extrémités de P, nous obtenons ainsi (FIG. 64) pour les diverses travées les triangles de leurs lignes croisées (n° 27 et n° 30) que d'ailleurs il ne faut pas confondre avec les lignes croisées proprement dites.

La besogne étant ainsi préparée, nous pouvons maintenant procéder au tracé des polygones funiculaires des diverses travées.

Pour la 1^{re} travée le moment en A est nul, donc les deux côtés extérieurs du funiculaire de cette travée se confondent et le point A est sur la ligne croisée de gauche de ce premier funiculaire, portant à partir de A (FIG. 65) la verticale AA_1 égale à l'intersection correspondante aa_1 trouvée, FIG. 64, sur le triangle des lignes croisées, nous savons que A_1 appartient à la direction de la ligne croisée de droite du premier funiculaire (voir n° 30), c'est-à-dire au côté n° 2; le point homologue de A_1 par rapport à B est sur la verticale du point homologue de A (voir n° 37), or l'homologue de A est F_2 (FIG. 63), l'intersection de la verticale de F_2 et de la droite A_1B nous donne H qui est l'homologue de A_1 et comme A_1 appartient à la ligne croisée de droite du funiculaire de la 1^{re} travée son homologue H appartient à la ligne croisée de gauche du funiculaire de la travée suivante; la verticale de

(1) Ici les funiculaires de toutes les travées intermédiaires sont à 4 côtés, ceux des deux travées extrêmes sont à trois côtés, car pour ces travées les deux côtés extérieurs des funiculaires se confondent: le point A appartient à la ligne croisée de gauche du funiculaire de la 1^{re} travée, le point B appartient à la ligne croisée de droite du funiculaire de la dernière travée.

H coupe sur le triangle des lignes croisées un segment hh_1 (FIG. 64), nous portons $HH_1 = hh_1$ et nous savons que H_1 appartient à la direction de la ligne croisée de droite (côté n° 3) du funiculaire de la 2^{de} travée (voir n° 37); H_1 étant sur la verticale de F_2 , son homologue est sur la verticale de F_4 qui est l'homologue de F_2 , et nous l'obtenons en tirant la droite H_1C qui vient couper la verticale de F_4 en J et ainsi nous avons ce point J qui est l'homologue de H_1 et de ce chef appartient à la direction de la ligne croisée de gauche de la troisième travée (côté n° 2).

Et maintenant nous continuons la marche indiquée ci-dessus, sans plus ample explication : nous portons JJ_1 égal à jj_1 , le point J_1 est sur le côté 3 du 3^e funiculaire, son homologue K est sur le côté 2 du 4^e funiculaire ; nous portons KK_1 égal à kk_1 , le point K_1 est sur la ligne croisée de droite (côté n° 3) du 4^e et dernier funiculaire, or pour ce dernier funiculaire la ligne croisée de droite se confond avec le côté extérieur, donc passe par l'appui E et par conséquent K_1E est la direction de la ligne croisée de droite du funiculaire de la dernière travée, EG est cette ligne croisée ou côté n° 3.

Ayant le point G il suffit maintenant de remonter la série des points obtenus ci-dessus pour avoir les polygones funiculaires depuis E jusque A, nous les avons dessinés en trait fort.

Les segments déterminés par les côtés milieux de ces funiculaires sur les verticales des appuis mesurent les moments fléchissants au droit de ces appuis (voir les n° 25 à 29) et ces moments connus on peut tracer les diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants pour l'ensemble de la poutre.

* * *

42. Le tracé des 4 funiculaires que nous venons d'exécuter comporte un certain nombre de vérifications qu'il importe de faire pour avoir la certitude qu'aucune erreur n'a été commise :

1° Le côté 2 du 4^e funiculaire doit passer par le point E_1 déterminé en portant $EE_1 = ee_1$ (voir n° 30).

2° Le côté 3 du 3^e funiculaire doit passer par Q qui est l'homologue de E_1 et doit couper le côté 2 du 4^e funiculaire sur l'antiverticale de D, (n° 35 à 37).

3° Le point Q_1 obtenu en portant $QQ_1 = qq_1$ doit se trouver sur le côté 2 du 3^e funiculaire (voir n° 30).

4° Le côté 3 du second funiculaire doit passer par R qui est l'homologue de Q_1 et doit couper le côté 2 du 3^e funiculaire sur l'antiverticale de C. Et ainsi de suite.

§ 9. Poutre continue à extrémités encastrées.

43. Soit (FIG. 66, PL. XII) une poutre continue à cinq travées, les extrémités des travées n° 1 et n° 5 sont encastrées, appuis de niveau, poutre à section constante.

Nous traçons les trisectrices et antiverticales. Nous connaissons P_1 et P_2 qui représentent la surface de charge des travées n° 2 et n° 3, les autres travées ne portent rien. Sur les verticales de P_1 et de P_2 nous prenons un pôle O, et sur l'horizontale de O une distance polaire quelconque OO_1 . Sur les verticales de O_1 nous portons les longueurs P_1 et P_2 et nous obtenons ainsi les triangles des lignes croisées pour ces deux travées chargées (voir § précédent).

Nous connaissons KA la direction du côté extérieur du funiculaire de la travée n° 1, de même nous connaissons FG le côté extérieur du funiculaire de la travée n° 5.

Le point A appartient au côté milieu du funiculaire de la 1^{re} travée, son homologue A_1 appartient à la ligne croisée gauche du funiculaire de la 2^e travée, à partir de A_1 nous portons $A_1B = ab$ (cette dernière quantité est relevée sur le triangle des lignes croisées), le point B appartient à la ligne croisée de droite du funiculaire de la 2^e travée, son homologue B_1 appartient à la ligne croisée de gauche de la 3^e travée ; nous portons $B_1D = b_1d$, cette dernière quantité étant relevée sur le triangle des lignes croisées de la troisième travée, le point D appartient à la ligne croisée de droite de la 3^e travée.

Nous passons maintenant à la travée n° 5 : le point F est sur le côté milieu du funiculaire de cette travée, son homologue F_1 est sur le côté milieu de la travée n° 4, l'homologue F_2 de F_1 est sur la ligne croisée de droite de la travée n° 3, or le point D trouvé ci-dessus appartient aussi à ce côté, donc la direction DF_2 de cette ligne croisée est connue et le tracé complet du funiculaire de toutes les travées en découle.

La vérification des tracés et la détermination des moments se fait comme il est dit au § précédent.

§ 10. Poutres continues à extrémités en porte-à-faux.

44. Nous supposons la même poutre continue à cinq travées dont il est question ci-dessus, sauf que l'encastrement en G est remplacé par un appui simple que la poutre dépasse d'une certaine longueur en porte-à-faux.

Nous supposons que les travées n° 2 et n° 3, ainsi que celle en porte-à-faux sont chargées.

L'extrémité en K est encastree.

La détermination des points A, A₁, B, B₁ et D se fait comme il est dit au § précédent et comme il est indiqué FIG. 66.

Pour la suite nous passons à la FIG. 67.

Nous connaissons la valeur du moment agissant sur l'appui G du chef de la charge en porte-à-faux, nous portons en GG₁ la valeur de ce moment à l'échelle choisie.

Le point G₁ est sur le côté milieu du funiculaire de la travée n° 5, son homologue H est sur le côté milieu du funiculaire de la travée n° 4, l'homologue H₁ de H est sur la ligne croisée de droite du funiculaire de la troisième travée, et avec le point D (FIG. 66) qui est connu il détermine la direction de ce côté de funiculaire, et de celui-ci dérivent immédiatement tous les autres.

§ 11. Dénivellation des appuis.

45. — Au cours de l'exposé que nous venons de donner de la théorie des poutres continues nous avons toujours supposé que les appuis étaient de niveau, cependant il peut quelquefois se produire une dénivellation, soit volontaire, soit accidentelle, si cette dénivellation est telle que la limite d'élasticité de la matière n'est pas dépassée elle reste dans l'ordre des déformations données par l'équation de l'élastique :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

cette équation est donc applicable, or toute la théorie précédente

est basée sur elle, par conséquent cette théorie est applicable dans le cas non seulement d'appuis de niveau mais encore d'appuis dénivellés pourvu que cette dénivellation n'atteigne pas une valeur capable de provoquer des fatigues dépassant la limite d'élasticité.

Nous devons notamment noter que dans le cas de semblable dénivellation les théorèmes des FIG. 53 et 56 ci-avant sont applicables, (voir n° 35 à 37).

Nous passons à un exemple.

* * *

46. — Soit une poutre continue sur trois appuis (FIG. 68, PL. XIII), les travées ont les longueurs $l_1 = 8$ m., $l = 12$ m. ; nous supposons que l'appui du milieu vienne à tasser (ou soit abaissé) de 15 millimètres et nous avons à déterminer les réactions qui en résultent sur les appuis extrêmes et le moment sur l'appui central.

Nous traçons (FIG. 68) les travées à l'échelle $\frac{1}{n} = \frac{1}{100}$ et nous déterminons les points fixes F et F₁.

Nous traçons en BB₁ (FIG. 69) la dénivellation en vraie grandeur.

Nous arrêtons l'échelle m d'après laquelle nous tracerons la valeur des surfaces de charge.

Nous connaissons la valeur de EI, et nous prenons (FIG. 70) une distance polaire OO₁ telle que

$$OO_1 = \frac{EI}{mn}$$

Voilà la besogne préparée.

Les funiculaires des travées AB et BC passent nécessairement par les points A, B₁ et C; la travée AB n'a qu'une seule surface de charge qui est le triangle ABG dont la hauteur BG est d'ailleurs inconnue, mais nous connaissons la verticale de son centre de gravité, c'est la trisectrice de la travée AB, trisectrice voisine de l'appui du milieu; l'unique surface de charge de la travée BC est le triangle CBG, et la verticale de son centre de gravité est la trisectrice voisine de l'appui du milieu.

Puisqu'il n'y a qu'une seule surface de charge par travée, chaque funiculaire ne se compose que de deux côtés (c'est-à-dire que les côtés

extrêmes AD et CS des funiculaires de la FIG. 53 disparaissent), par conséquent les points A et C (FIG. 69) appartiennent aux côtés milieux des funiculaires que nous cherchons.

L'homologue A_1 de A par rapport à B_1 appartient au côté milieu du funiculaire de la travée BC, cet homologue est, en vertu des théorèmes des n^{os} 35 à 37, à l'intersection de la verticale du point fixe F et de la droite AB_1 ; nous connaissons donc la direction CA_1 du côté milieu (qui ici se confond avec le côté extrême) du funiculaire de la 2^e travée; ce côté s'arrête en E_1 sur la trisectrice voisine de l'appui central, le côté suivant a nécessairement la direction E_1B_1 et s'arrête en K_1 sur la trisectrice de la 1^{re} travée, enfin le dernier côté est celui K_1A , et nous avons donc AK_1B_1 le funiculaire de la 1^{re} travée, et B_1E_1C le funiculaire de la seconde.

Comme dans tous les tracés graphiques nous devons maintenant procéder aux vérifications, il faut :

1^o Que l'intersection L de AK_1 et CE_1 soit sur l'antiverticale de l'appui du milieu.

2^o Que l'homologue C_1 de C soit sur la direction du côté AK_1 .

Il nous reste à évaluer le moment M sur l'appui du milieu : prolongeons le côté CE_1 du funiculaire jusqu'en D sur la verticale de cet appui, le moment M est proportionnel à B_1D , en effet par le pôle O (FIG. 70) menons les deux droites OH et OH_1 parallèles aux côtés CE_1 et E_1B_1 du funiculaire de la seconde travée, nous avons en vertu des triangles semblables :

$$\frac{B_1D}{BE} = \frac{HH_1}{OO_1} = \frac{\frac{1}{2m} lM}{\frac{1}{mn} EI} = \frac{n l M}{2 EI}$$

$$M = \frac{2EI}{nl} \frac{B_1D}{BE}$$

Nous savons que l est évalué en fonction du mètre, d'autre part les quantités B_1D et BE qui sont relevées à l'échelle sur le dessin le sont en fonction du millimètre, on a donc :

$$BE = \frac{1000l}{3n}$$

et par conséquent :

$$M = \frac{6EI}{1000 l^2} \times B_1D.$$

Le tracé nous donne $B_1 D = 11.3$ millimètres, donc

$$M = \frac{6 \times 11.3}{1000 \times 12^2} \times EI = \frac{67.8}{144\,000} EI.$$

Si les dimensions de la poutre sont telles que EI en fonction du mètre a pour valeur 80 000 000, nous avons :

$$M = \frac{67.8 \times 80\,000\,000}{144\,000} = 37\,660 \text{ kgmètres.}$$

En fonction des dimensions de la première travée l'expression du moment est :

$$M = \frac{6EI}{1000l_1^2} \times B_1 D_1$$

or $B_1 D_1 = 5$ millimètres, il en résulte :

$$M = \frac{6 \times 80\,000\,000 \times 5}{1000 \times 8^2} = 37\,500 \text{ kgmètres.}$$

Connaissant M on en déduit les valeurs des réactions : $\frac{M}{l_1}$ sur l'appui A, $\frac{M}{l}$ sur l'appui C.

* * *

47. — Le cas que nous venons de traiter graphiquement peut l'être analytiquement : les réactions et moments provoqués par la dénivellation de 15 millimètres sur l'appui B sont celles que développerait sur une poutre de 20 mètres une charge locale P appliquée à 8 et 12 mètres de ses extrémités et capable de provoquer une flèche de 15 millimètres en son point d'application (FIG. 71).

Nous avons trouvé comme expression de la flèche f au point d'application de P :

$$f = \frac{P l^2 l_1^2}{3EIL}$$

d'où

$$P = \frac{3EILf}{l^2 l_1^2}$$

La réaction Q de l'appui C a pour valeur :

$$Q = \frac{Pl_1}{L} = \frac{3EI f}{l^2 l_1} \quad \text{d'où} \quad M = Ql = \frac{3EI f}{l_1}$$

en chiffres :

$$M = \frac{3 \times 80\,000\,000 \times 0,015}{12 \times 8} = 37500 \text{ kgmètres}$$

exactement le même résultat que par les tracés graphiques.

§ 12. Calcul d'un pont à trois travées continues.

48. Comme application des théories précédentes nous allons calculer un pont continu de trois travées, chacune de 81 mètres de portée.

Le pont est à double voie pour chemin de fer.

Son poids mort moyen est de 6500 kgs par mètre courant de portée.

La surcharge d'épreuve est de 8000 kgs.

Nous traçons (FIG. 72 PL XIV) les trois travées à l'échelle de $\frac{1}{1250}$, soit 8 millimètres pour 10 mètres.

Nous menons les trisectrices, quant aux antiverticales elles se confondent avec la verticale des appuis.

Nous déterminons le position des points fixes F, notre figure ne donne pas les tracés qui les déterminent afin de ne pas la surcharger.

* * *

49. Moments. Nous supposons une charge de 1000 kgs par mètre courant agissant sur toute l'étendue de la première travée, les deux autres ne portent rien.

La surface de charge est une parabole dont la flèche est

$$f = \frac{pl^2}{8} = \frac{1000 \times 81^2}{8} = 820\,125 \text{ kgmètres}$$

A l'échelle de 1 millimètre pour 20000 kilogrammètres, cette flèche aura une longueur de 41 millimètres.

Nous prenons comme distance polaire la demi-longueur d'une travée.

Nous portons $AA_1 = 2f = 82$ millimètres, (FIG. 72).

A_1F est la direction du côté milieu du funiculaire de la première travée et de la connaissance de ce côté découle immédiatement le tracé complet du funiculaire de toutes les travées.

$$M_b = BB_1 = 22 \text{ millimètres} \times 20000 = 440\,000 \text{ kgmètres}$$

$$M_c = CC_1 = 5,8 \times 20000 = 116\,000 \text{ kgmètres}$$

* * *

50. Nous supposons une charge de 1000 kg. par mèt. courant sur la travée du milieu, les deux autres ne portent rien.

$$BB_2 = 2f = 82 \text{ millimètres.}$$

Nous tirons la droite B_2O qui coupe la trisectrice en H, la droite HF est la direction du côté milieu du funiculaire de la seconde travée, connaissant cette direction on en déduit immédiatement le tracé complet du funiculaire de toutes les travées ; nous ne traçons que la moitié de ce funiculaire, celle depuis le milieu de BC jusque l'appui D ; nous avons $CC_2 = 16,8$, d'où :

$$M_b = M_c = 16,8 \times 20\,000 = 336\,000 \text{ kgmètres.}$$

* * *

51. Nous devons maintenant faire les diverses hypothèses de poids mort et surcharge.

Poids mort seul :

$$M_b = M_c = (336\,000 + 440\,000 - 116\,000) \times 6,5 = 660\,000 \times 6,5 = 4\,290\,000 \text{ kgm}$$

Poids mort et surcharge sur toute les travées :

$$M_b = M_c = 660\,000 (6,5 + 8) = 9\,570\,000 \text{ kgmètres}$$

Poids mort et surcharge sur les travées 1 et 3 :

$$M_b = M_c = 4\,290\,000 + (440\,000 - 116\,000)8 = 6\,882\,000 \text{ kgmètres}$$

Poids mort et surcharge sur la travée du milieu :

$$M_b = M_c = 4\,290\,000 + 336\,000 \times 8 = 6\,978\,000 \text{ kgmètres.}$$

Poids mort et surcharge sur la travée 1 :

$$M_b = 4\,290\,000 + 440\,000 \times 8 = 7\,810\,000 \text{ kgmètres.}$$

$$M_c = 4\,290\,000 - 116\,000 \times 8 = 3\,362\,000 \text{ kgmètres.}$$

Poids mort et surcharge sur les travées 1 et 2 :

$$M_b = 4\,290\,000 + (440\,000 + 336\,000)8 = 10\,498\,000 \text{ kgmètres}$$

$$M_c = 4\,290\,000 + (336\,000 - 116\,000)8 = 6\,050\,000 \text{ kgmètres.}$$

Ayant les valeurs des moments sur les appuis, nous pouvons tracer les diagrammes pour les divers cas de surcharge, ce tracé est connu, inutile que nous le répitions.

La FIG. 72 montre combien aisément et avec combien peu de lignes les divers résultats ci-dessus s'obtiennent. Nous donnons ci-dessous un tableau comparatif des valeurs obtenues par le calcul graphique de la FIG. 72 et par le calcul ordinaire au moyen de formules :

	CALCUL GRA- PHIQUE	CALCUL CHIFFRÉ
Poids mort seul	4290000	
Poids mort et surcharge sur les 3 travées .	9570000	9513450
» » » sur les travées 1 et 3	6882000	6889050
» » » sur la travée 2 .	6978000	6889050
» » » » 1 .	7810000	7763850
» » » » 1 .	3362000	3389850
» » » sur les travées 1 et 2	10498000	10388250
» » » »	6050000	6014250

Vu la faible échelle du tracé de la FIG. 72, la concordance entre les deux genres de résultats est satisfaisante.

* * *

52. Efforts tranchants. — Nous supposons une charge de 1000 kgs sur toutes les travées.

$$M_b = M_c = 660\ 000 \text{ kgmètres.}$$

Ce moment est représenté en BB_1 (FIG. 73) à l'échelle de 1 millimètre pour 10000 kilogrammètres.

Nous joignons AB_1 , de son milieu G nous portons $GH = 164$ millimètres, soit deux fois la flèche de la parabole, flèche qui a pour valeur

$$\frac{pl^2}{8} = \frac{1000 \times 81^2}{8} = 820125 \text{ kgmètres.}$$

Les droites AH et B_1H sont les tangentes aux extrémités A et B_1 de la parabole des moments fléchissants de la 1^{re} travée.

Nous portons $HH_1 = 81000$ kgmes, la charge totale sur la travée AB.

De H_1 nous tirons une parallèle à HB_1 , du point d'intersection I nous tirons une horizontale qui découpe sur HH_1 deux segments égaux aux efforts tranchants en A et B ; on a :

$$T'_0 = HJ = 32500 \text{ kgmes}$$

$$T_1 = JH_1 = 48500 \text{ kgmes}$$

de plus on a évidemment :

$$T'_1 = \frac{81000}{2} = 40500 \text{ kgmes.}$$

De ces résultats nous déduisons le tableau suivant :

CALCUL GRAPHIQUE			CALCUL CHIFFRÉ
POIDS MORT SEUL	SUR-CHARGE	TOTAL	TOTAL
$T'_0 = 32500 \times 6.5 = 211250$	260000	471250	469800
$T_1 = 48500 \times 6.5 = 315250$	388000	703250	704700
$T'_1 = 40500 \times 6.5 = 263250$	324000	587250	587250
$R_b = T_1 + T'_1 = R_c = 578500$	712000	1290500	1291950

* * *

53. Poids mort et surcharge sur les travées 1 et 3.

La surcharge agissant seule nous donne :

$$M_b = M_c = 440000 - 116000 = 324000.$$

Nous portons (FIG. 73) :

$$CC_1 = 32^{mm}4 = 324000 \text{ kgrmètres.}$$

Nous tirons DC_1 et par le milieu K nous portons $KL = 164$ millimètres.

Les droites LC_1 et LD sont les tangentes aux extrémités de la parabole des moments fléchissants sur la travée CD.

Nous portons $DM = 81000$ kgmes ; par M nous tirons MN parallèle à LC_1 et par le point d'intersection N avec LD nous menons une horizontale qui détermine sur MD deux segments qui mesurent les réactions en D et C, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{en D,} & \quad 36600 \text{ kgmes} \\ \text{en C,} & \quad 44400 \text{ kgmes} \end{aligned}$$

et pour la surcharge 8000 kgmes nous avons :

$$\begin{aligned} \text{en D,} & \quad 36600 \times 8 = 292800 \\ \text{en C,} & \quad 44400 \times 8 = 355200 \end{aligned}$$

Et finalement sous l'action combinée du poids mort et de la surcharge nous avons :

CALCUL GRAPHIQUE	CALCUL CHIFFRÉ
$T'_0 = T_3 = 211250 + 292800 = 504050$	502200
$T_1 = T'_2 = 315250 + 355200 = 670450$	672300
$T'_1 = T_2 = \quad \quad \quad = 263250$	263250
$R_b = R_c = 670450 + 263250 = 933700$	935550

* * *

54. — Poids mort et surcharge sur la travée 2.

Pour une charge de 1000 kgmes agissant sur la seule travée du milieu on a :

$$M_b = M_c = 336000 \text{ kgmètres.}$$

Nous portons :

$$BB_2 = CC_2 = 33^{mm}6 = 336000 \text{ kgmètres.}$$

De O, milieu de B_2C_2 , nous portons sur la verticale une longueur $ON = 164$ millimètres ; B_2N et C_2N sont les tangentes à la parabole de la travée centrale ; nous portons $B_2P = \frac{81000}{2} = 40.5$ millimètres ; nous tirons une horizontale PQ et par son point Q d'intersection avec

la tangente B_2N nous menons une parallèle à DC_2 et le segment PR ainsi déterminé mesure la réaction aux appuis des deux travées extérieures; nous avons :

$$PR = 4.1 \text{ millim.} = 4100 \text{ kgmètres.}$$

et pour la surcharge :

$$4100 \times 8 = 32800 \text{ kgmètres.}$$

Et en définitive nous avons pour le poids mort et la surcharge le tableau suivant :

CALCUL GRAPHIQUE	CALCUL CHIFFRÉ
$T'_0 = 211250 - 32800 = 178450$	178200
$T_1 = 315250 + 32800 = 348050$	348300
$T'_1 = 263250 + 324000 = 587250$	587250
$R_b = R_c = 935300$	935550

* * *

55. — Poids mort et une des travées d'extrémités portant la surcharge.

Soit une charge de 1000 kgs sur la travée n° 3, les deux autres ne portent rien, on a :

$$M_b = - 116\,000 \text{ kgmes}$$

$$M_c = 440\,000 \text{ kgmes.}$$

Nous portons, FIG. 73

$$BB_3 = 116\,000 = 11 \text{ millimètres } 6$$

$$CC_3 = 440\,000 = 44 \text{ millimètres}$$

et nous tirons AB_3C_3D .

Du milieu S de C_3D nous portons sur la verticale une longueur $ST = 164$ millimètres; les droites C_3T et DT sont les tangentes à la parabole.

Nous prenons $TU = 81000 \text{ kgmes} = 81 \text{ millimètres}$.

Nous tirons UV parallèle à DT .

La ligne Va est horizontale, celle Vm est parallèle à AB_3 , celle Vn est parallèle à B_3C_3 .

Nous avons :

$$T'_0 = am = + 1400 \text{ kgmes}$$

$$T_1 = am = - 1400 \text{ kgmes}$$

$$T'_1 = an = - 6800 \text{ kgmes}$$

$$T_2 = an = + 6800 \text{ kgmes}$$

$$T'_2 = aT = + 46000 \text{ kgmes}$$

$$T_3 = aU = + 35000 \text{ kgmes}$$

Ces résultats acquis, nous avons sous l'action combinée du poids mort et de la surcharge le tableau suivant :

CALCUL GRAPHIQUE	CALCUL CHIFFRÉ
$T'_0 = 211250 + 1400 \times 8 = 222450$	221400
$T_1 = 315250 - 1400 \times 8 = 304050$	305000
$T'_1 = 263250 - 6800 \times 8 = 208850$	209250
$T_2 = 263250 + 6800 \times 8 = 317650$	317250
$T'_2 = 315250 + 46000 \times 8 = 683250$	683100
$T_3 = 211250 + 35000 \times 8 = 491250$	491400
$R_b = 304050 + 208850 = 512900$	514250
$R_c = 317650 + 683250 = 1000900$	1000350

* * *

56. Poids mort et surcharge sur les travées n° 2 et 3.

Ce cas est la combinaison des deux précédents, il suffit donc de les additionner algébriquement, bien entendu en ne portant qu'une fois l'effet du poids mort, on a :

CALCUL GRAPHIQUE	CALCUL CHIFFRÉ
$T_0' = 211250 - 32800 + 1400 \times 8 = 189650$	189000
$T_1 = 315250 + 32800 - 1400 \times 8 = 336850$	337500
$T_1' = 263250 + 324000 - 6800 \times 8 = 532850$	533250
$T_2 = 263250 + 324000 + 6800 \times 8 = 641650$	641250
$T_2' = 315250 + 32800 + 46000 \times 8 = 716050$	715500
$T_3 = 211250 - 32800 + 35000 \times 8 = 458450$	459000
$R_b = T_1 + T_1' =$	869700 870750
$R_c = T_2 + T_2' =$	1357700 1356750

* * *

57. En possession des données précédentes nous pouvons maintenant tracer les diagrammes des efforts tranchants dans les diverses hypothèses.

On remarquera que malgré la faible échelle des tracés, les résultats du calcul graphique sont très peu différents de ceux du calcul chiffré ordinaire, les différences constatées sont au surplus absolument négligeables en pratique.

Les diverses hypothèses de surcharge que nous avons calculées ci-dessus sont celles habituellement faites, on peut cependant se demander, et il est intéressant de rechercher, si ces diverses hypothèses réalisent bien pour chaque section le maximum de l'effort tranchant et du moment fléchissant, c'est le problème que nous allons étudier ci-après :

§ 13. Moments fléchissants maximum.

58. Soit une charge locale P appliquée en un point quelconque d'une travée AB faisant partie d'une poutre continue (FIG. 74, PL. XV).

Les points fixes sur AB sont F_1 et F_2 . La surface de charge est ACB dont le centre de gravité est en G au tiers de la médiane CD .

La verticale de G est à la distance $\frac{1}{3}(L + l)$ de l'appui A , ce qui

prouve que, quelle que soit la position de la charge P, toujours la verticale de G est dans le tiers central de la poutre.

Nous savons d'ailleurs que les points fixes sont toujours dans les tiers extérieurs.

Le moment maximum CH a pour valeur $\frac{Pl_1}{L}$, et représente cette valeur à une certaine échelle.

Nous savons que pour avoir, au moyen du tracé graphique, les valeurs des moments d'encastrement M_a et M_b à la même échelle que HC, il suffit de prendre comme distance polaire $\frac{L}{3}$ et la longueur de HC comme ligne représentative de la surface de charge (voir n° 30).

Or, le pôle étant pris sur la verticale de G, les lignes croisées ainsi déterminées découperont sur la verticale de l'appui A un segment AI ayant pour valeur :

$$\frac{AI}{HC} = \frac{\frac{1}{3}(L+l)}{\frac{1}{3}L} \quad \text{d'où} \quad AI = \frac{HC \times (L+l)}{L}$$

et sur la verticale de l'appui B un segment BJ ayant pour valeur :

$$BJ = HC \times \frac{L+l}{L}$$

Ces segments AI et BJ peuvent se construire très aisément : nous menons par C une parallèle KN à la ligne AB, ensuite par le même point C une parallèle à KB et une à AN, ces deux parallèles coupent les verticales des appuis aux deux points I et J déterminés ci-dessus, on a en effet :

$$AI = AK + KI = HC + AK \times \frac{l}{L} = HC \times \frac{L+l}{L}$$

de même pour BJ.

Donc AJ et BI sont les lignes croisées; notons, pour la vérification de l'exactitude de leur tracé, que ces lignes doivent se couper sur la verticale de G.

Nous menons les verticales des deux points fixes, et nous portons sur ces verticales en F_1f_1 et F_2f_2 la longueur des segments découpés par les lignes croisées sur ces mêmes verticales.

Tirant les lignes f_1F_2 et f_2F_1 nous déterminons les segments AA_1

et BB_1 qui mesurés à la même échelle que HC donneront les moments d'encastrement sur les appuis; joignant A_1B_1 , on a le trapèze AA_1B_1B qui est le diagramme des moments fléchissants dus aux moments d'encastrement.

Or si nous joignons par une droite les points a et b où les verticales des points fixes coupent les lignes croisées cette droite ab détermine sur les verticales des appuis deux segments AA_2 et BB_2 qui précisément sont égaux à AA_1 et BB_1 , en effet joignons A_1B_1 et prolongeons les verticales des points fixes jusqu'en a_1 et b_1 , nous avons deux trapèzes BB_1AA_1 et BB_1IM qui ont même hauteur AB , une base commune BB_1 et deux sommets égaux, $AA_1 = IM$, la ligne F_2b_1 du premier trapèze est donc égale à celle F_2b du second, de la même façon on démontrerait que F_1a_1 est égale à F_1a et par conséquent AA_2B_2B est le diagramme des moments fléchissants dus aux moments d'encastrement et comme ACB est le diagramme des moments dus à la charge locale, on a que la combinaison des deux, c'est-à-dire la partie en traits hachurés, représente les moments fléchissants dus à l'action simultanée de la charge locale et des moments d'encastrement.

La marche qui nous a conduits au tracé des moments nous indique que les points d'inflexion R et S ne peuvent pas sortir des intervalles AF_1 et BF_2 et cela quelle que soit la position et l'intensité de la charge P , donc sur l'étendue F_1F_2 qui sépare les points fixes c'est l'influence de la charge P qui toujours l'emporte en ce qui concerne les moments.

Si on convient de nommer positifs les moments dus aux charges P , on a la règle que voici : dans l'intervalle des points fixes les moments seront toujours positifs, en dehors de ces points ils peuvent être positifs ou négatifs.

Donc, pour une section W quelconque mais comprise entre les points fixes le maximum de moment fléchissant sera produit lorsque la travée AB porte le plus grand nombre possible de surcharges P , et ce maximum est toujours positif; pour une section V comprise entre l'appui et le point fixe voisin la détermination du moment maximum demande une recherche spéciale : supposons que pour une charge locale P appliquée en H le point d'inflexion S soit en la section V considérée, ainsi que c'est le cas pour la FIG. 74, il est à remarquer

que, quelle que soit la valeur de P appliquée en H toujours le point d'inflexion, c'est-à-dire le point des moments nuls, sera en cette même section V , car le moment fléchissant maximum de P peut toujours, en prenant l'échelle voulue, être représenté par HC , d'autre part, pour toute charge à gauche de H le point d'inflexion passera à gauche de V et le moment en V sera négatif, et l'inverse aura lieu pour toute charge à droite de H , le point H est donc un point limite en ce qui concerne la valeur des moments en la section V ; de là il résulte que le maximum des moments négatifs en V sera donné pour les surcharges P appliquées uniquement sur la portion AH de la poutre ainsi que l'indique la FIG. 75, et le maximum des moments positifs sera donné pour les surcharges appliquées sur HB exclusivement ainsi que l'indique la FIG. 76.

* * *

59. La question se pose maintenant de savoir comment déterminer le point limite H d'une section V prise dans l'intervalle BF_2 .

Pour résoudre cette question nous devons rechercher le lieu géométrique des points S , ce que nous allons faire sur la FIG. 77.

Nous représentons par AK la valeur du moment maximum produit par une charge P quel que soit son point d'application sur la travée AB , pour la facilité des tracés nous prendrons $AK = \frac{1}{2} AB$.

Supposons tout d'abord que le point d'application de P soit au milieu de AB , le sommet C sera au milieu de KN .

Nous prenons $KD = \frac{1}{2} KA$ et $NE = \frac{1}{2} KA$, nous tirons les lignes croisées BD et AE qui sur les verticales des points fixes déterminent les points a_1 et b_1 , l'intersection de la droite a_1b_1 avec les côtés AC et BC nous donne les deux points n° 1 qui sont deux points d'inflexion.

Si le point d'application de P se rapproche indéfiniment de l'appui A , les lignes croisées limites seront BK et AC qui sur les verticales des points fixes déterminent les deux points a_2 et b_2 , la droite a_2b_2 coupe le diagramme AKB aux deux points b_2 et n° 2 qui sont deux points d'inflexion.

De la même façon pour la charge appliquée à l'extrême limite du côté B les deux points d'inflexion sont a_3 et n° 3.

Voilà donc trois points du lieu géométrique des S qui sont connus

pour chaque intervalle AF_1 et BF_2 , on peut en déterminer d'autres et ainsi avoir suffisamment de points pour tracer avec une exactitude suffisante la courbe a_3 1 2 du lieu géométrique des S pour l'intervalle AF_1 et celle b_2 1 3 pour l'intervalle BF_2 .

Le tracé du lieu géométrique dans chaque intervalle sera considérablement simplifié en remarquant que :

$$F_2 b_2 = b_2 b_3 = 2b_2 b_1 = 2b_1 b_3$$

$$F_1 a_3 = a_3 a_2 = 2a_3 a_1 = 2a_1 a_2$$

donc déterminant les points a_3 et b_2 par les diagonales AN et BK on peut en déduire les autres.

Les lieux géométriques étant tracés voici comment on procède pour déterminer le point limite correspondant à une section V (FIG. 77) : on mène une verticale par le point V, verticale qui vient couper la courbe en un point S, on tire la droite BS qui vient couper KN en G et la verticale GH détermine le point limite H.

L'exposé ci-dessus nous permet maintenant de déterminer pour chaque section d'une travée quelconque d'une poutre continue la répartition des charges donnant les moments maximum ; soit (FIG. 78) une poutre de 8 travées, nous considérons la travée n° 4, si nous nous reportons à la FIG. 62 ci-avant et la combinons avec la FIG. 74, nous verrons que pour toute section de cette travée comprise entre les points fixes les moments maximum sont donnés par la répartition de la FIG. 78, n° 1.

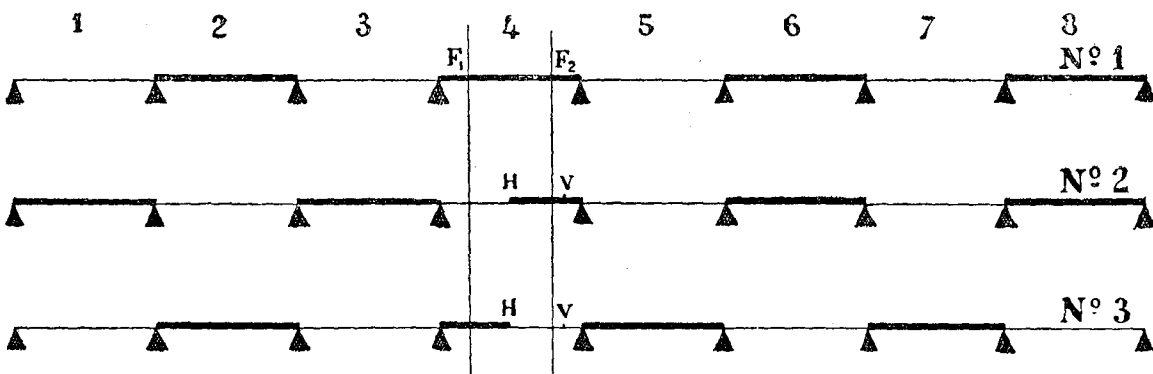


FIG. 78.

Pour une section V à droite en dehors des points fixes les moments maximum positifs sont donnés par la répartition de la FIG. 78, n° 2.

Les moments maximum négatifs en cette même section sont donnés par la répartition FIG. 78, n° 3.

Si la section V est située en dehors des points fixes du côté de l'appui de gauche les répartitions n° 2 et n° 3 sont interverties.

§ 14. Efforts tranchants maximum.

60. Pour avoir le maximum des efforts tranchants en une section quelconque M de la travée n° 4 (FIG. 79) il suffit de combiner les indications de la FIG. 44 (voir n° 32) avec celles de la FIG. 62, on trouve ainsi que le maximum de cisaillement vers le haut du tronçon AM sur la section M est donné par la répartition des surcharges de la FIG. 79, n° 1, et le maximum de cisaillement vers le bas est donné par la répartition FIG. 79, n° 2.

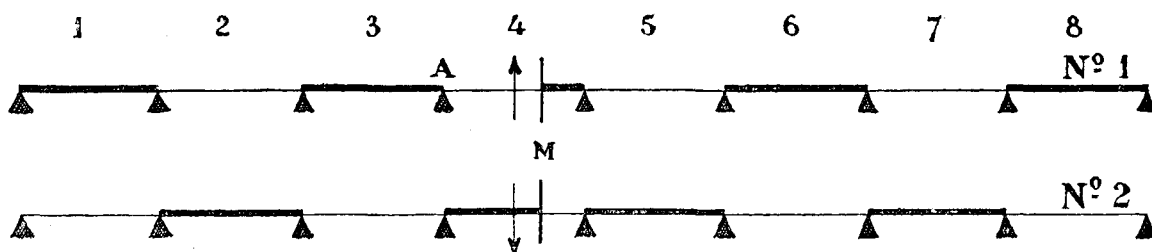
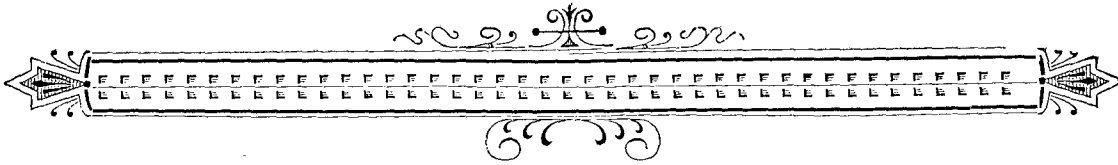


FIG. 79.

61. Il est à remarquer que la répartition rigoureuse des surcharges, telle qu'indiquée ci-dessus, en vue d'obtenir les maximum des efforts tranchants et des moments fléchissants, ne donne que des résultats assez peu supérieurs à ceux obtenus par la marche habituelle qui consiste à étudier les surcharges par portions occupant des travées entières.



CHAPITRE III

PONTS TOURNANTS.

§ 1. Formules générales.

62. Les ponts tournants sont des ponts continus à deux travées qui peuvent se calculer par la méthode analytique du chap. I ou la méthode graphique du chap. II ; ces deux chapitres donnent la solution générale du problème des ponts tournants, toutefois vu son importance et les particularités qu'il présente nous devons le traiter spécialement, et nous le ferons en recourant surtout à la méthode analytique.

Le cas général du pont tournant est donné par la FIG. 80.

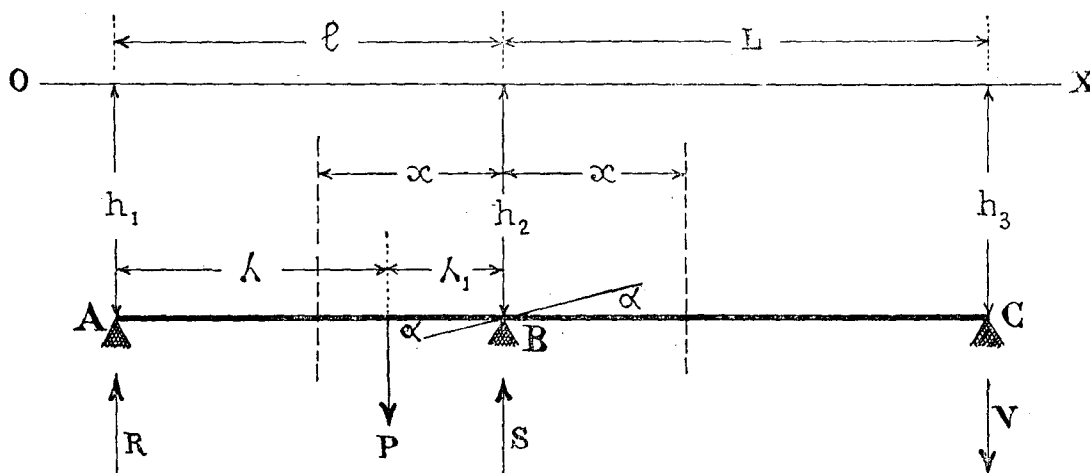


FIG. 80.

La poutre ABC repose sur trois appuis dont les niveaux sont quelconques, elle est de section variable et porte une charge quelconque P.

Les niveaux des appuis rapportés à une horizontale OX sont représentés par les cotes h_1 , h_2 et h_3 .

Les réactions R, S et V des appuis sont dues à deux causes :

- 1° La charge P,
- 2° La dénivellation des appuis.

Nous allons déterminer isolément l'effet de chacune de ces causes.

* * *

63. Réactions dues à P. — Nous supposons la charge P agissant seule, c'est-à-dire la poutre reposant sur 3 appuis de niveau.

Nous donnons a priori aux réactions R, S et V la direction notée sur la FIG. 80, le signe des résultats nous indiquera si cette supposition est exacte ou bien doit être modifiée. Nous désignons par α l'inclinaison de la fibre moyenne sur l'appui B et lui supposons la direction figurée.

Nous avons pour la travée BA :

$$h_1 = h_2 - \alpha l - \frac{I}{E} \int_0^l \frac{R(l-x)^2 dx}{I} + \frac{I}{E} \int_0^{\lambda_1} \frac{P(\lambda_1-x)(l-x) dx}{I}$$

or

$$h_1 = h_2$$

d'où

$$(1) \quad -El\alpha - R \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} + P \int_0^{\lambda_1} \frac{(\lambda_1-x)(l-x) dx}{I} = 0.$$

Nous avons pour la travée BC :

$$h_3 = h_2 + \alpha L + \frac{I}{E} \int_0^L \frac{V(L-x)^2 dx}{I}$$

$$h_3 = h_2$$

$$(2) \quad + EL\alpha + V \int_0^L \frac{(L-x)^2 dx}{I} = 0.$$

Éliminant α entre (1) et (2) nous obtenons

$$(3) \quad \frac{-R}{l} \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} + \frac{V}{L} \int_0^L \frac{(L-x)^2 dx}{I} + \frac{P}{l} \int_0^{\lambda_1} \frac{(\lambda_1-x)(l-x) dx}{I} = 0.$$

Cette équation combinée avec l'équation statique

$$(4) \quad Rl - P\lambda_1 + VL = 0$$

permet de déterminer R et V.

La réaction S se détermine par la seconde équation statique :

$$(5) \quad R - P + S - V = 0$$

et ainsi le problème se trouve résolu pourvu que l'on connaisse la valeur de I.

* * *

Si le moment d'inertie a la valeur constante I_1 sur la travée AB et I_2 sur la travée BC, l'équation (3) ci-dessus devient :

$$-\frac{Rl^2}{I_1} + \frac{VL^2}{I_2} + \frac{P\lambda_1^2}{2lI_1} (3l - \lambda_1) = 0$$

d'où

$$(6) \quad R = \frac{+ P\lambda_1 \left[\frac{L}{I_2} + \frac{\lambda_1}{2lI_1} (3l - \lambda_1) \right]}{l \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

On voit que R est toujours positif, donc dirigé vers le haut, quelles que soient les valeurs de P et λ_1 .

Remplaçant λ_1 par $(l - \lambda)$, cette expression se présente sous la forme plus simple :

$$(7) \quad R = \frac{P(l - \lambda)}{l} \left[\frac{\lambda(l + \lambda)}{2lI_1 \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)} \right]$$

or

$$+ VL = - Rl + P\lambda_1$$

d'où

$$(8) \quad + V = \frac{+ P\lambda (l^2 - \lambda^2)}{2lLI_1 \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

Cette valeur, toujours positive, indique que la réaction V a toujours la direction indiquée sur la FIG. 80, donc vers le bas, et ce quelles que soient les valeurs de P et λ ou λ_1 .

$$(9) \quad S = - R + P + V = \frac{+ P\lambda}{l} \left[\frac{(l + L)(l^2 - \lambda^2)}{2lLI_1 \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)} \right]$$

valeur toujours positive, donc la réaction S est toujours dirigée vers le haut.

Si le moment d'inertie est constant d'un bout à l'autre du pont nous avons $I_1 = I_2$ et les expressions deviennent :

$$(10) \quad R = \frac{+P(l-\lambda)}{l} \left[I - \frac{\lambda(l+\lambda)}{2l(l+L)} \right].$$

$$(11) \quad V = \frac{+P\lambda(l^2-\lambda^2)}{2lL(l+L)}.$$

$$(12) \quad S = \frac{+P\lambda}{l} \left[I + \frac{l^2-\lambda^2}{2lL} \right].$$

Nous pouvons remplacer λ par une fraction $\frac{l}{n}$ de la travée, les formules (10) à (12) deviennent :

$$(13) \quad R = \frac{P(n-1)}{n} \left[I - \frac{l(n+1)}{2n^2(l+L)} \right].$$

$$(14) \quad V = \frac{+Pl^2(n^2-1)}{2n^3L(l+L)}.$$

$$(15) \quad S = \frac{P}{n} \left[I + \frac{l(n^2-1)}{2n^2L} \right].$$

* * *

Si la charge locale P est appliquée en un point de la travée BC (FIG. 81), les réactions des appuis se déduisent des formules précédentes en y remplaçant l par L , L par l , et remarquant que les R_1 et

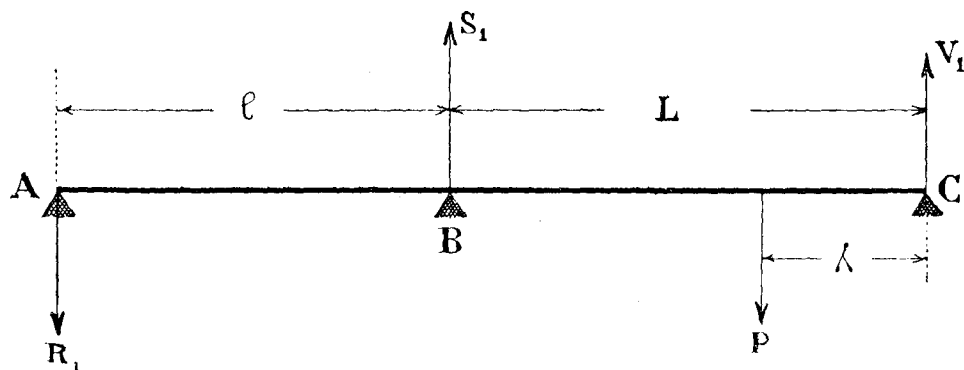


FIG. 81.

V_1 de la FIG. 81 sont les V et R de la FIG. 80; ainsi dans le cas d'une section uniforme sur toute la longueur de la poutre ABC et d'appuis de niveau, nous déduisons des égalités (10) à (15) :

$$(16) \quad V_1 = \frac{P(L - \lambda)}{L} \left[1 - \frac{\lambda(L + \lambda)}{2L(l + L)} \right] = \frac{P(n - 1)}{n} \left[1 - \frac{L(n + 1)}{2n^2(l + L)} \right]$$

$$(17) \quad R_1 = \frac{+ P \lambda (L^2 - \lambda^2)}{2lL(l + L)} = \frac{+ PL^2(n^2 - 1)}{2n^3l(l + L)}$$

$$(18) \quad S_1 = \frac{P \lambda}{L} \left[1 + \frac{L^2 - \lambda^2}{2lL} \right] = \frac{P}{n} \left[1 + \frac{L(n^2 - 1)}{2n^2l} \right]$$

* * *

64. Les valeurs de S et S_1 , réactions sur l'appui central, peuvent s'obtenir directement par la méthode que voici.

Soit (FIG. 82) une pièce de longueur $(l + L)$ portant uniquement sur les deux appuis d'extrémité A et C, cette pièce est chargée d'un poids P appliqué à la distance λ de l'appui C.

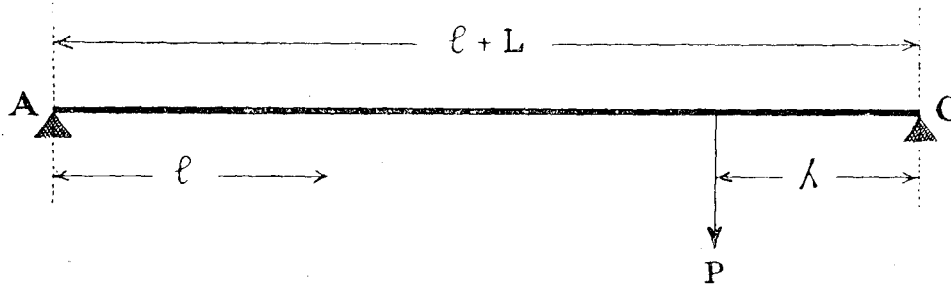


FIG. 82.

La flèche f que prendra cette pièce à la distance l de l'appui A a pour valeur :

$$\epsilon f = \frac{P\lambda l}{6(l + L)} \left[-\lambda^2 + 2lL + L^2 \right]$$

voir la 1^{re} partie du cours « *Résistance des Matériaux* ».

La flèche f_1 produite par S_1 appliquée à la même distance l de

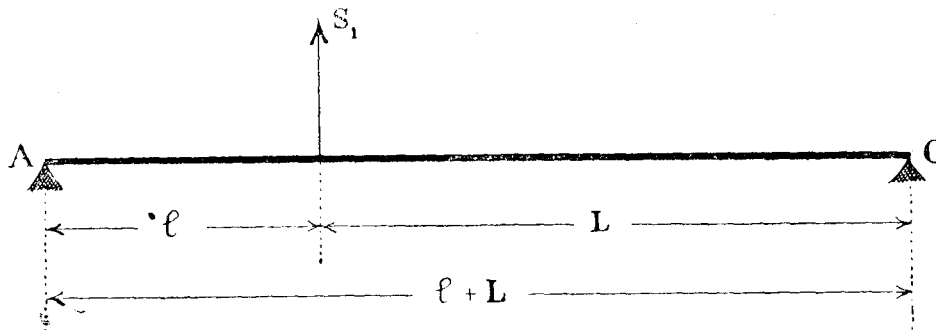


FIG. 83.

l'appui A (FIG. 83) sera donnée en faisant dans l'expression ci-dessus :
 $P = S_1$ et $\lambda = L$, d'où :

$$\varepsilon f_1 = \frac{S_1 L l}{6(l+L)} \times 2lL$$

Dans le cas d'une travée de pont tournant dont les appuis sont de niveau, $f = f_1$, d'où l'équation :

$$\frac{S_1 L l}{6(l+L)} \times 2lL = \frac{P\lambda l}{6(l+L)} \left[-\lambda^2 + 2lL + L^2 \right]$$

$$S_1 = \frac{P\lambda (-\lambda^2 + 2lL + L^2)}{2lL^2} = \frac{P\lambda}{L} \left[1 + \frac{L^2 - \lambda^2}{2lL} \right]$$

ce qui est précisément l'expression n° (18) trouvée ci-dessus.

En permutant les lettres on peut de S_1 déduire le S de la FIG. 80.

Ayant la réaction sur l'appui du milieu, la statique donne R et V sur les culées.

Nous avons ci-avant au n° 47 traité par une méthode analogue le cas de la dénivellation des appuis de la poutre.

* * *

Possédant les valeurs des réactions pour une charge locale P on peut les déterminer pour une charge continue p par unité courante occupant une portion quelconque des travées, il suffit de remplacer dans les expressions précédentes λ par x et P par pdx et intégrer, les limites de l'intégrale étant la longueur de travée occupée par la charge continue.

Recherchons (FIG. 84) la valeur de la réaction R_2 en A pour une charge continue uniforme p sur la travée AB et q sur celle BC, en supposant les deux travées d'égale section et les appuis de niveau.

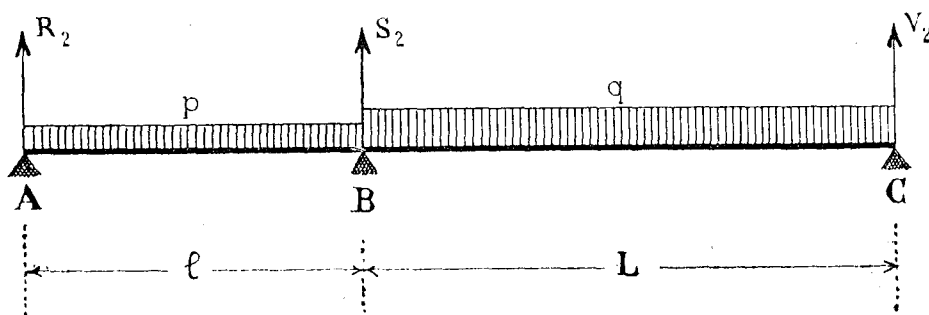


FIG. 84.

La réaction R_2 est égale à celle R due à la charge uniforme sur AB moins celle R_1 due à la charge uniforme sur BC :

$$R_2 = R - R_1.$$

De la formule (10) nous tirons (FIG. 85) :

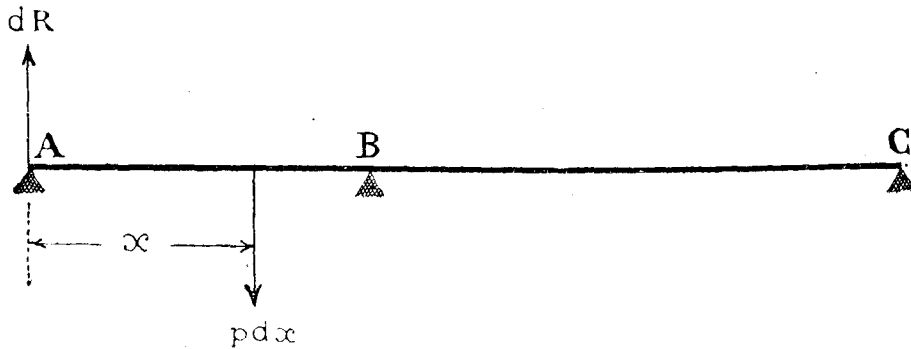


FIG. 85.

$$(19) \quad R = \int_0^l dR = \int_0^l \frac{p dx (l-x)}{l} \left[1 - \frac{x(l+x)}{2l(l+L)} \right] = \frac{pl}{2} \left[1 - \frac{l}{4(l+L)} \right]$$

De la formule (17) nous tirons (FIG. 86) :

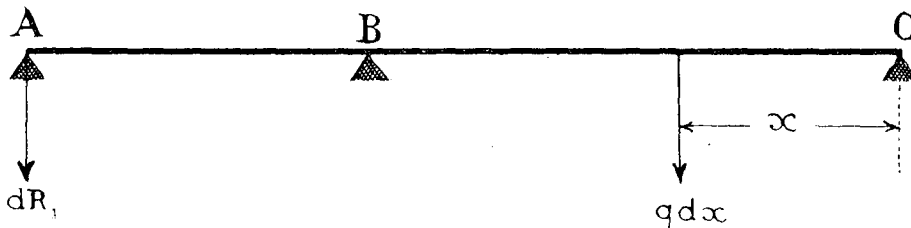


FIG. 86.

$$(20) \quad R_1 = \int_0^L dR_1 = \int_0^L \frac{-qx dx (L^2 - x^2)}{2lL(l+L)} = \frac{-qL^3}{8l(l+L)}$$

et par conséquent

$$(21) \quad R_2 = \frac{pl}{2} - \frac{pl^3 + qL^3}{8l(l+L)}$$

La réaction V_2 en C (FIG. 84) s'obtient en remplaçant dans la formule (21) la lettre l par L , p par q et vice versa, d'où :

$$(22) \quad V_2 = \frac{qL}{2} - \frac{pl^3 + qL^3}{8L(l+L)}$$

Quant à la réaction S_2 en B , elle est égale à celle S due à la

charge uniforme sur AB, plus celle S_1 due à la charge uniforme sur BC, la formule (12) nous donne :

$$(23) \quad S = \int_0^l \frac{x p dx}{l} \left[1 + \frac{l^2 - x^2}{2 l L} \right] = \frac{p l}{2} + \frac{p l^2}{8 L}$$

La formule (18) nous donne :

$$(24) \quad S_1 = \int_0^L \frac{x q dx}{L} \left[1 + \frac{L^2 - x^2}{2 l L} \right] = \frac{q L}{2} + \frac{q L^2}{8 l}$$

nous voyons encore que S_1 se déduit de S en intervertissant les lettres. En définitive nous avons :

$$(25) \quad S_2 = S + S_1 = \frac{p l + q L}{2} + \frac{p l^3 + q L^3}{8 l L}$$

Le moment M sur l'appui B a pour valeur :

$$(26) \quad M = - \frac{p l^3 + q L^3}{8 (l + L)}$$

L'effort tranchant T à gauche de l'appui B a pour valeur :

$$(27) \quad T = R_2 - p l = - \frac{p l}{2} - \frac{p l^3 + q L^3}{8 l (l + L)}$$

Celui T' à droite a pour valeur :

$$(28) \quad T' = V_2 - q L = - \frac{q L}{2} - \frac{p l^3 + q L^3}{8 L (l + L)}$$

On a d'ailleurs que :

$$T + T' = S_2$$

Dans le cas où les moments d'inertie seraient variables, les divers résultats ci-dessus s'obtiendraient en partant des équations générales du n° 63.

* * *

65. Réactions dues à la dénivellation des appuis. (FIG. 86^{bis}). —

La poutre ABC primitivement droite repose sur trois appuis dénivellés, elle ne porte aucune charge, nous supposons que l'appui A est surélevé par rapport aux deux autres, qui eux sont de niveau, donc :

$$h_1 < h_2 = h_3.$$

Nous supposons que les réactions R, S et V ont la direction

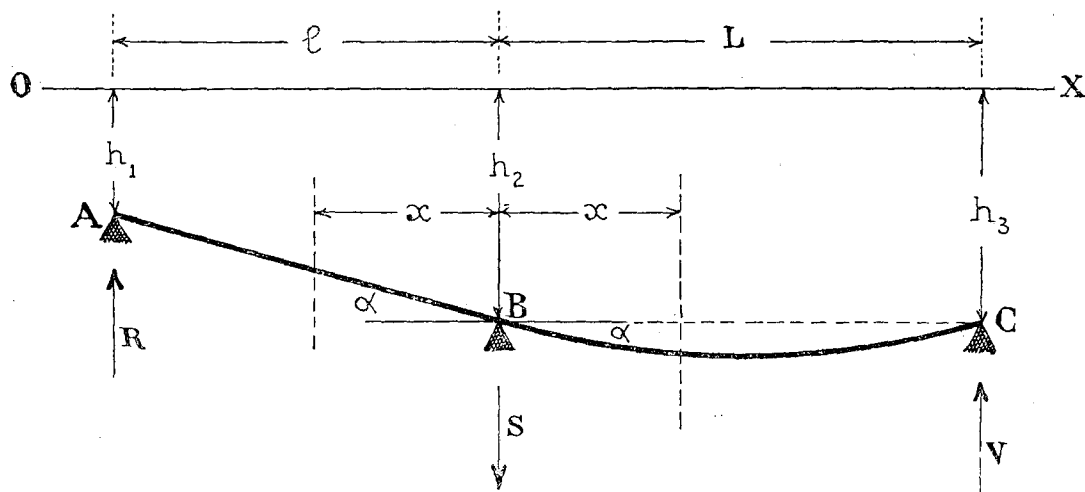


FIG. 86^{bis}.

figurée, nous avons :

$$(29) \quad h_1 = h_2 - \alpha l - \frac{1}{E} \int_0^l \frac{R(l-x)^2 dx}{I}$$

$$h_3 = h_2 + \alpha L - \frac{1}{E} \int_0^L \frac{V(L-x)^2 dx}{I}$$

comme $h_3 = h_2$, nous avons :

$$\alpha = \frac{1}{LE} \int_0^L \frac{V(L-x)^2 dx}{I}$$

Substituant dans (29) nous avons :

$$(30) \quad \frac{E(h_2 - h_1)}{l} = \frac{R}{l} \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{I} + \frac{V}{L} \int_0^L \frac{(L-x)^2 dx}{I}$$

Cette équation combinée avec les deux équations statiques :

$$Rl - VL = 0$$

$$R - S + V = 0$$

donne les trois réactions et par conséquent résout le problème.

* * *

Si le moment d'inertie a la valeur constante I_1 sur la travée A B et I_2 sur celle BC, l'équation (30) devient :

$$(31) \quad \frac{Rl^2}{I_1} + \frac{VL^2}{I_2} = \frac{3E(h_2 - h_1)}{l}$$

et combinant avec les 2 équations statiques nous obtenons :

$$(32) \quad R = \frac{3 E (h_2 - h_1)}{l^2 \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

$$(33) \quad V = \frac{3 E (h_2 - h_1)}{L l \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

$$(34) \quad S = \frac{3 E (h_2 - h_1)}{l \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)} \times \frac{(l + L)}{l L}$$

Les réactions R, S et V ont exactement les directions indiquées sur la FIG. 86^{bis}.

Si la dénivellation est en sens inverse, l'expression des réactions est la même mais la direction de celles-ci est inverse

Si $I_1 = I_2$ nous avons :

$$(35) \quad R = \frac{3 E I (h_2 - h_1)}{l^2 (l + L)}$$

$$(36) \quad V = \frac{3 E I (h_2 - h_1)}{l L (l + L)}$$

$$(37) \quad S = \frac{3 E I (h_2 - h_1)}{l^2 L}$$

* * *

Si la dénivellation se produit ainsi que l'indique la FIG. 86^{ter},

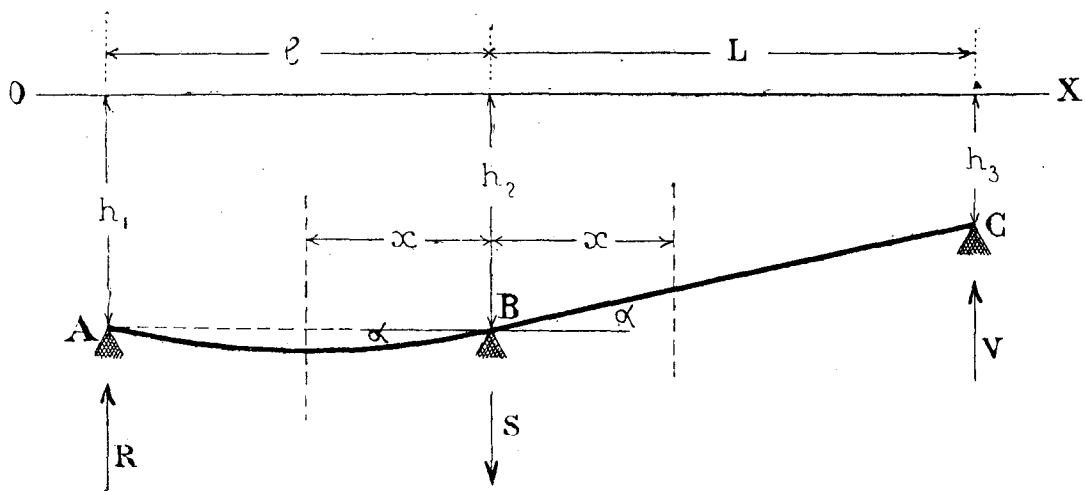


FIG. 86^{ter}.

c'est-à-dire

$$h_1 = h_2 > h_3$$

nous avons en permuttant les lettres dans les expressions (32) à (37) :

$$(38) \quad V = \frac{3 E (h_2 - h_3)}{L^2 \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

$$(39) \quad R = \frac{3 E (h_2 - h_3)}{l L \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)}$$

$$(40) \quad S = \frac{3 E (h_2 - h_3)}{L \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right)} \times \frac{(l + L)}{l L}$$

et dans le cas où $I_1 = I_2$:

$$(41) \quad V = \frac{3 E I (h_2 - h_3)}{L^2 (l + L)}$$

$$(42) \quad R = \frac{3 E I (h_2 - h_3)}{l L (l + L)}$$

$$(43) \quad S = \frac{3 E I (h_2 - h_3)}{l L^2}$$

* * *

Si les 3 appuis sont dénivellés, il suffit d'additionner algébriquement les expressions (32) à (37) avec celles (38) à (43).

Nous pouvons maintenant passer à l'étude proprement dite des ponts tournants, tout d'abord quelques détails descriptifs et ensuite le calcul.

§ 2. Description

66. Les ponts tournants se subdivisent en trois types :

Le typ. I (FIG. 87, PL. XVI) qui se compose de deux travées (généralement inégales) et ne recouvre qu'une seule passe navigable.

Le typ. II (FIG. 88) qui se compose de deux travées, toujours égales, et recouvre deux passes navigables.

Le typ. III (FIG. 89) qui est la combinaison de deux types n° I et recouvre une seule passe navigable, c'est le type du pont de la Penfeld à Brest construit en 1860, il ne s'emploie que pour des passes très larges, la subdivision en deux ponts donne pour chacun plus de légèreté et par conséquent plus de facilité de manœuvre.

Dans les ponts tournants la travée qui recouvre la passe navigable se nomme la *volée*, l'autre se nomme la *culasse*.

Le but de la culasse est de faire équilibre à la volée quand le pont est ouvert, généralement pour parfaire cet équilibre il est nécessaire de munir la culasse d'un contre-poids spécial en gueuses de fonte ou en maçonnerie.

Dans un pont tournant on distingue :

Le pont proprement dit.

Le pivot avec ou sans couronne de galets.

Le mécanisme de rotation.

Le mécanisme d'arrêt.

Le mécanisme de calage.

C'est là ce qu'on rencontre dans les ponts tournants importants et surtout dans ceux livrant passage à une ligne ferrée, pour les ponts de moindre importance, et tels sont par exemple ceux pour routes au-dessus de nos canaux et rivières ordinaires, on simplifie les choses : ainsi le pivot est sans couronne de galets, la manœuvre se fait généralement sans mécanisme par la simple action directe d'un homme à l'extrémité de la culasse, enfin les mécanismes d'arrêt et de calage sont également supprimés, le calage se fait par la force vive du pont forçant les extrémités à monter sur un plan incliné, l'arrêt se fait par un simple crochet qui s'agraffe en un point de la culasse ; pour éviter que la force vive de fermeture n'engendre des chocs destructeurs le pont vient s'arrêter contre un tampon de choc du genre de ceux employés pour les locomotives, ce tampon en réagissant a en outre pour effet de maintenir le crochet d'arrêt à l'état de serrage et ainsi empêcher qu'il ne se défasse à un moment inopportun.

Pour les ponts tournants de chemin de fer ou de route, le tablier est constitué comme pour les ponts fixes ordinaires sauf que toujours il est du genre léger : platelage en madriers ou pavage en bois.

§ 3. Calculs

67. Pour la clarté de l'exposé des calculs d'un pont tournant nous prendrons un cas particulier, nous étudierons un pont route du type I ayant les dimensions de la FIG. 87, PL. XVI.

La FIG. 90, PL. XVII donne la coupe du pont et des longerons, la FIG. 91 le plan sommaire, la FIG. 92 l'élévation de l'âme d'un longeron et les FIG. 93 à 95 les détails du pivot avec coupes des chevêtres et des entretoises de tablier.

Le calcul complet d'un pont tournant comprend :

- I. Le calcul des longrines de la voie charretière.
- II. Le calcul des entretoises de tablier et des consoles de trottoir.
- III. Le calcul du contrepoids d'équilibre.
- IV. Les calculs des longerons et des effets du calage.
- V. Le calcul des chevêtres.
- VI. Le calcul du pivot.
- VII. Le calcul des mécanismes.

* * *

68. Calcul des longrines de la voie charretière. — La voie charretière est constituée d'un platelage supérieur en sapin blanc de 5 centimètres d'épaisseur et de madriers inférieurs en chêne de 10 centimètres d'épaisseur. Les traverses métalliques sont distantes de 1,40 mètre.

Le moment maximum produit par l'essieu d'arrière lors du passage du chariot de 18 tonnes est (l'essieu d'arrière portant 10 tonnes) :

$$\frac{10000}{2} \times \frac{1.40}{2} = 3500 \text{ kgmètres.}$$

Le platelage transversal supérieur établit une solidarité entre les madriers en chêne, on peut admettre que toute la largeur 2,50 mètres de la voie charretière résiste au moment fléchissant de l'essieu de 10 tonnes, d'où une fatigue t :

$$t = 3500 \times \frac{6}{2.5 \times 0,10^2} = 840.000 \text{ kgmes par mètre carré}$$

Le bois fatigue donc à 84 kgs par centimètre carré, fatigue parfaitement admissible vu les circonstances exceptionnelles dans lesquelles elles se produisent ; au surplus pour le passage d'un chariot de 18 tonnes on aura toujours soin de mettre un platelage supplémentaire de vieilles palplanches ou autres pièces analogues.

* * *

69. Calcul des traverses de la voie charretière, des consoles de trottoir et des longrines extérieures de trottoir. — Nous ne nous arrêterons pas à détailler ces calculs, ils ne présentent rien de particulier et n'offrent aucune difficulté.

* * *

70. Calcul du contrepoids d'équilibre de la partie tournante.

— Le calcul du contrepoids exige qu'au préalable nous déterminions tout au moins approximativement le poids mort du pont, faisant le mètre nous avons trouvé par mètre courant de pont :

Pour les traverses de tablier et le contreventement	234 kgs
Pour les consoles et longrines de trottoirs	46 »
Pour le garde-corps	54 »
Pour les planchers	451 »
Pour les longerons principaux	485 »
Total	1270 »

Le poids 485 kg. donné pour les longerons principaux n'est que présumé puisque nous ne les avons pas encore calculés.

Le poids 1270 kgmes ne comprend ni les parties fixes du pont, ni les entretoises de chevêtre, ni la crapaudine du pivot, car ces poids n'ont pas d'influence sur la valeur du contrepoids.

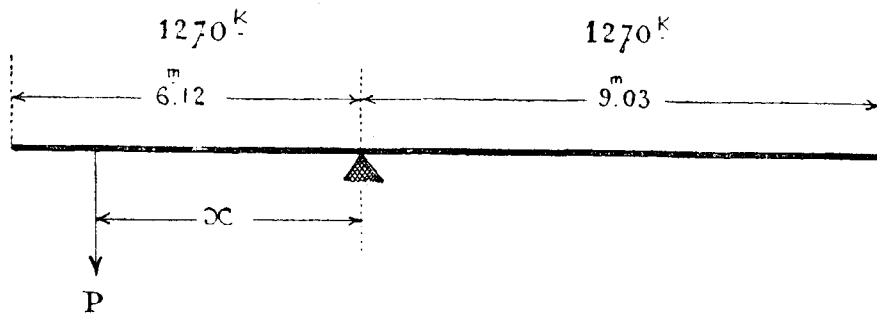


FIG. 96.

Le contrepoids doit être calculé de façon que le pont ouvert soit en équilibre sur le pivot, représentant par P la valeur de ce contrepoids et x sa distance au pivot, on a :

$$1270 \times \frac{6.12^2}{2} + Px = 1270 \times \frac{9.03^2}{2}$$

d'où

$$P = \frac{28001}{x}$$

Le contrepoids doit être appliqué le plus loin possible du pivot de façon à avoir x le plus grand possible et par conséquent P le plus petit possible, dans le cas actuel x est égal à 5 mètres, on a donc :

$$P = 5600 \text{ kilogs.}$$

Si le bras de levier x diminue, la valeur du contrepoids augmente, la charge totale sur le pivot augmente et par conséquent aussi la difficulté de manœuvre, c'est pour ces motifs que la culasse d'un pont tournant ne peut pas être de trop faible longueur : supposons que notre culasse, au lieu d'avoir 6^m12, n'ait que 3 mètres et calculons le contrepoids, son bras de levier sera tout au plus de 2 mètres et nous aurons :

$$1270 \times \frac{3^2}{2} + P \times 2^m = 1270 \times \frac{9.03^2}{2}$$

$$P = 23063 \text{ kgmes}$$

et le poids total approximatif sur le pivot sera :

$$(3 + 9.03) 1270 + 23063 = 38341 \text{ kgmes}$$

tandis que dans le premier cas il n'était que de :

$$(6.12 + 9.03) 1270 + 5600 = 24840 \text{ kgmes.}$$

On voit la différence très considérable de poids, il en résulte que non seulement le pont à culasse de 3 mètres sera plus difficile à manœuvrer que celui à culasse de 6 mètres mais aussi sera plus coûteux. La culasse d'un pont tournant ne peut donc pas être trop courte.

Le contrepoids se place généralement sous forme de gueuses de fonte entre les deux traverses extrêmes de la culasse, il faut les arrimer de telle façon qu'elles ne puissent ni se déplacer ni surtout tomber hors du pont, car il en pourrait résulter pour celui-ci la culbute dans l'eau. Il importe de combiner son plan de façon que sous le pont et à l'endroit requis il y ait l'espace voulu pour y loger le volume de fonte devant former le contrepoids.

La détermination de la valeur du contrepoids que nous venons de faire n'est que provisoire, toutefois elle est nécessaire pour pouvoir continuer nos calculs de résistance ; quand tous les détails du pont seront calculés et arrêtés et que par conséquent on connaîtra tous les poids on refera le calcul du contrepoids ; quoiqu'on fasse cependant le calcul ne donnera jamais qu'approximativement sa valeur, cela doit se régler définitivement au montage lorsque le pont est terminé et prêt à tourner, alors on réglera le contrepoids de façon à mettre le pont en équilibre parfait sur son pivot, c'est-à-dire de façon que la crapaudine d'aucun côté ne touche, ne frotte contre le pivot, ce qui se sentira à la plus ou moins grande facilité de rotation du pont, en d'autres termes on réglera le contrepoids de façon que la manœuvre du pont se fasse avec le plus de facilité possible.

Pour les ponts de grande longueur il peut arriver que le froid de l'hiver ou la chaleur de l'été, en faisant varier la longueur des bras de levier, impose l'obligation d'un réglage périodique du contrepoids.

Malgré toutes les précautions prises il arrivera toujours que l'équilibre du pont ne se maintiendra pas parfait, l'humidité imbibant le plancher plus d'un côté que de l'autre pourra déjà produire cet effet, mais sous ce rapport l'action prédominante sera celle du vent : le tablier de volée étant plus étendu que celui de culasse, la composante verticale d'un vent violent peut engendrer un hors d'équilibre très accentué et même dangereux, il faut se prémunir contre ces éventualités, on y parvient en donnant une certaine hauteur à la crapaudine entourant le pivot (FIG. 93) et en ne laissant, en D, entre celle-ci et le cercle de base du pivot qu'un jeu de 1 millimètre seulement (ces parties sont ajustées au tour) ; lorsque le pivot est accompagné d'une couronne de galets, cette disposition de la crapaudine n'est pas absolument requise car les galets sont là pour s'opposer à tout devers du pont, toutefois on la conserve car elle a à remplir l'office de maintenir le pont sur son pivot, d'empêcher qu'un choc latéral (lors du passage d'un chariot, par exemple) ne le fasse glisser sur son pivot.

Nous verrons plus loin dans quelles circonstances il convient qu'un pivot soit accompagné d'une couronne de galets.

71. Calcul des longerons et du calage. — Ce calcul comporte l'examen des divers cas suivants :

- 1° Le pont est ouvert.
- 2° Le pont est fermé et calé.
- 3° Le pont livre passage à la charge roulante.
- 4° Le pont porte la surcharge uniforme.
- 5° Effets du calage.

* * *

72. Le pont est ouvert. — Il ne porte que son poids mort qui pour chaque longeron est de $\frac{1270}{2}$ kgmes par mètre courant, et le contrepoids qui est de 2800 kgmes.

Le moment fléchissant maximum se produit au droit du pivot, il a pour valeur :

$$\frac{1270}{2} \times \frac{9.03^2}{2} = \frac{1270}{2} \times \frac{6.12^2}{2} + 2800 \times 5 = 25892 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons PL. XVIII le diagramme AKEC du pont ouvert.

Nous devons rechercher de combien les extrémités de la volée et de la culasse s'abaissent lorsque le pont est ouvert.

La hauteur moyenne du longeron de volée est de 512 millimètres et de culasse 555 millimètres.

Pour simplifier les calculs nous supposerons que ces longerons ont une hauteur constante égale à ces moyennes et nous calculerons les flèches en conséquence.

La section de la FIG. 90, PL. XVII a, pour une hauteur de 0^m.512, un moment d'inertie:

$$I = \frac{0,02034647}{12}$$

et pour 0^m.555 :

$$I = \frac{0,022818}{12}$$

Ces moments d'inertie sont assez peu différents l'un de l'autre, nous pouvons donc, sans erreur pratique, admettre que la volée et la culasse ont la même section et prendre comme moment d'inertie la moyenne de ceux ci-dessus, ce qui donne :

$$I = \frac{0,0216}{12} = 0,0018$$

La flèche de volée sera

$$f = \frac{pL^4}{8EI} = \frac{\frac{1270}{2} \times 9.03^4}{8 \times 18.000.000.000 \times 0,0018} = 0^m,0163.$$

La flèche de culasse :

$$f = \frac{\frac{1270}{2} \times 6.12^4}{8 \times 18 \times 10^9 \times 0,0018} + \frac{2800 \times 5^2 (3 \times 6.12 - 5)}{6 \times 18 \times 10^9 \times 0,0018} = 0,0034 + 0,0048 = 0^m,0082$$

Il est bien entendu que ces flèches devront être déterminées à nouveau lorsque, après tous les calculs terminés, la section du longeron aura été arrêtée définitivement.

* * *

73. Le pont est fermé et calé. — Après fermeture du pont, la première opération à laquelle on se livre est de faire disparaître par le calage la flèche 16.3 millim. qu'a prise la volée et celle de 8.2 millim. qu'a prise la culasse, cela afin de ramener les trois appuis du pont sur l'horizontale.

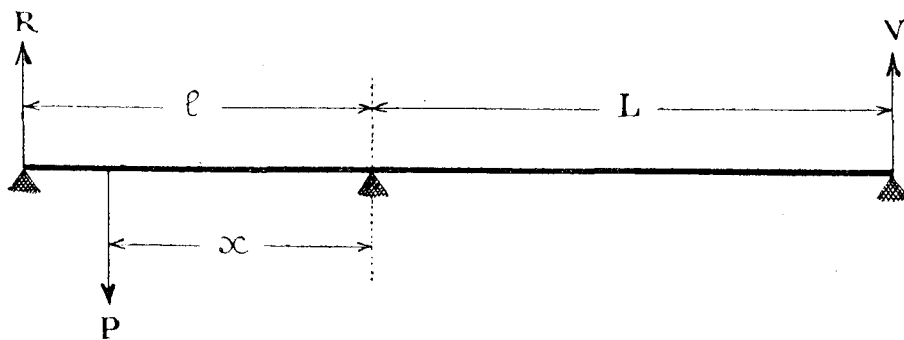


FIG. 97.

Soit R l'intensité du calage à la culasse (FIG. 97).

V l'intensité à la volée.

p le poids mort par mètre courant de longeron.

P le contrepoids.

Le calage se fait toujours le pont étant vide.

Ecrivons l'équation des moments par rapport au pivot :

$$Rl - \frac{pl^2}{2} - Px = VL - \frac{pL^2}{2}$$

En vertu de l'équation du contrepoids on a :

$$\frac{pl^2}{2} + Px = \frac{pL^2}{2}$$

il reste donc :

$$Rl = VL$$

relation très simple entre les intensités de calage à la culasse et à la volée.

Le pont calé de façon que les flèches aient disparu est une poutre reposant sur trois appuis de niveau.

La réaction V à l'extrémité de la volée est la somme algébrique des réactions dues à la charge locale 2800 kg. (contrepoids) et à la charge uniforme 635 kgmes par mètr. ct. de longeron.

L'effet du contrepoids est donné par la formule (11) :

$$\frac{P\lambda(l^2 - \lambda^2)}{2lL(l+L)} = \frac{(6.12^2 - 1.12^2) 1.12 \times 2800}{2 \times 6.12 \times 9.03 \times 15.15} = 68 \text{ kgs}$$

L'effet de la charge uniforme est donné par la formule (22) :

$$\frac{qL}{2} - \frac{pl^3 + qL^3}{8L(l+L)} = \frac{635}{2} \left[9.03 - \frac{6.12^3 + 9.03^3}{4 \times 9.03 \times 15.15} \right] = 2308 \text{ k.}$$

on a donc (*) :

$$V = 2308 - 68 = 2240 \text{ kgmes.}$$

La réaction R à l'extrémité de la culasse est :

$$R = \frac{VL}{l} = \frac{2240 \times 9.03}{6.12} = 3305 \text{ kg.}$$

Cette valeur de R pourrait s'obtenir encore en appliquant les formules (10) et (21) et aussi celles de dénivellation (35) et (42).

En résumé donc les efforts de calage sont :

2240 kg. à l'extrémité de la volée.

3305 kg. à l'extrémité de la culasse.

On a : $2240 \times 9.03 = 3305 \times 6.12 = 20227 \text{ kgrmètr.}$

(*) La valeur de V peut encore s'obtenir en appliquant les formules (36) et (41) des dénivellations et remarquant que :

$$h_2 - h_1 = \text{flèche à la culasse} = 0,0082$$

$$h_2 - h_3 = \text{flèche à la volée} = 0,0163$$

on obtient :

$$V = \frac{3 \times 18000000000 \times 0,0018}{9.03 \times 15.15} \left(\frac{0,0082}{6.15} + \frac{0,0163}{9.03} \right) = 2235 \text{ kgs}$$

Le diagramme des efforts de calage est celui ALC (PL. XVIII).

Pour avoir le diagramme du pont fermé et calé de niveau il suffit d'additionner algébriquement le diagramme AKEC du pont ouvert et celui ALC dû au calage, cette addition effectuée graphiquement sur la PL. XVIII (elle est indiquée par les traits tirés entre les deux diagrammes) nous donne le diagramme ADEFC placé en dessous, diagramme du pont fermé et calé de niveau, pont ne portant que son poids mort et son contrepoids.

* * *

74. Nous voyons combien le relèvement des extrémités du pont, combien le calage en d'autres termes, améliore les conditions de résistance de la poutre, puisque le moment maximum 25892 kilogrammètres qui sévissait lorsque le pont n'était pas calé se réduit à 5665 kgmètres après calage, et ce calage consiste tout simplement à relever l'un bout de 16 millimètres et l'autre de 8 millimètres seulement. Nous avons ici un exemple tangible et frappant de la grande influence des dénivellations dans les ponts continus. Supposons qu'au lieu d'un pont tournant il s'agisse d'une simple poutre fixe reposant sur trois appuis et portant une charge locale de 2800 kgmes et une charge uniforme de 635 kgmes par mètre, les appuis étant supposés de niveau cette poutre sera calculée pour un moment maximum de 5665 kgmt, mais si lors de l'établissement de la maçonnerie des appuis on commet une erreur, et une erreur de dénivellation de 8 et même 16 millimètres n'est pas difficile à commettre (au surplus le tassement inégal des appuis peut amener des dénivellations de cette importance), les appuis ne seront plus de niveau et par conséquent le moment maximum 5665 kgmètres sur lequel on a tablé pour déterminer les dimensions de la poutre sera dépassé et ce moment pourra atteindre 25892 kilogrammètres, c'est-à-dire mettre la poutre en danger de rupture immédiate, voilà la conséquence de quelques millimètres de dénivellation quand il s'agit d'une poutre continue ; attention donc, et grande attention, de réaliser des niveaux mathématiques quand on aura à établir de semblables poutres, cette sujétion constitue d'ailleurs leur grand inconvénient, c'est pourquoi, autant que possible, on évite aujourd'hui l'emploi des ponts continus. (Voir ci-avant n° 13 et 45).

Si l'appui central vient à tasser de 14.4 millimètres le longeron ne porte plus que sur ses appuis extrêmes.

* * *

75. Calage le plus favorable pour le poids mort seul. —

Nous venons d'établir le diagramme pour le pont fermé et calé de niveau.

Une question se présente : est-ce là le calage le plus favorable ? est-ce celui qui réalise dans le pont les moindres fatigues, les moindres moments fléchissants ?

C'est ce qui nous reste à examiner et cet examen se fera très facilement.

Nous reproduisons (PL. XIX) le diagramme AKEC du pont ouvert, et par tâtonnements nous menons sur ce diagramme celui AFC, diagramme du calage (*), tel que ses différences d'avec le diagramme AKEC soient les plus petites possibles, ce diagramme AFC sera celui du calage donnant dans la poutre les fatigues les plus faibles ; nous constatons à l'échelle que le point F correspond à une ordonnée de 21800 kilogramètres, d'où il résulte que l'énergie du calage correspondant est :

$$\text{à la volée : } \frac{21800}{9.03} = 2414 \text{ kgmes.}$$

$$\text{à la culasse : } \frac{21800}{6.12} = 3562 \text{ kgmes.}$$

c'est-à-dire qu'il doit y avoir à la volée un supplément de calage de :

$$2414 - 2240 = 174 \text{ kgmes.}$$

$$\text{et à la culasse : } 3562 - 3305 = 257 \text{ kgmes.}$$

lesquels suppléments de force produisent des suppléments de flèche ou de relèvement ayant pour valeur :

$$\text{à la volée : } \frac{174 \times 9.03^3}{3 \times 18 \times 10^9 \times 0.0018} = 0^m0013 = 1,3 \text{ millimètre}$$

$$\text{à la culasse : } \frac{257 \times 6.12^3}{3 \times 18 \times 10^9 \times 0.0018} = 0^m0006 = 0,6 \text{ millimètre}$$

(*) Le diagramme du calage est toujours un triangle.

Le diagramme du pont calé de cette façon s'obtient en combinant les deux diagrammes AKEC et AFC de la PL. XIX, ce qui donne le diagramme AK_1GC_1 dans lequel le moment maximum est de 4500 kilogrammètres, tandis que pour le pont calé de niveau il était de 5665 kgmèt. (voir PL. XVIII), soit 1165 kilogrammètre plus élevé.

Ce résultat corrobore nos observations ci-dessus quant à la grande influence de la dénivellation des appuis, on voit que moyennant un minime relèvement supplémentaire des appuis extrêmes (1.3 millimètre d'un côté et $\frac{6}{10}$ de millimètre de l'autre) on fait baisser le moment maximum de 5665 à 4500 kgmètres, soit au delà de 20 %.

Voilà donc déterminées les conditions du calage le plus favorable pour le poids mort seul ; on voit que l'énergie de ce calage est indépendante de la section du longeron du pont, même si ce longeron est de section variable.

* * *

76. Le pont livre passage à la charge roulante. — Nous faisons abstraction du poids mort du pont et du contrepoids qu'il porte.

La charge roulante consiste en un chariot de 18 tonnes, la FIG. 98 donne le schéma du train de ce chariot avec les charges portées par

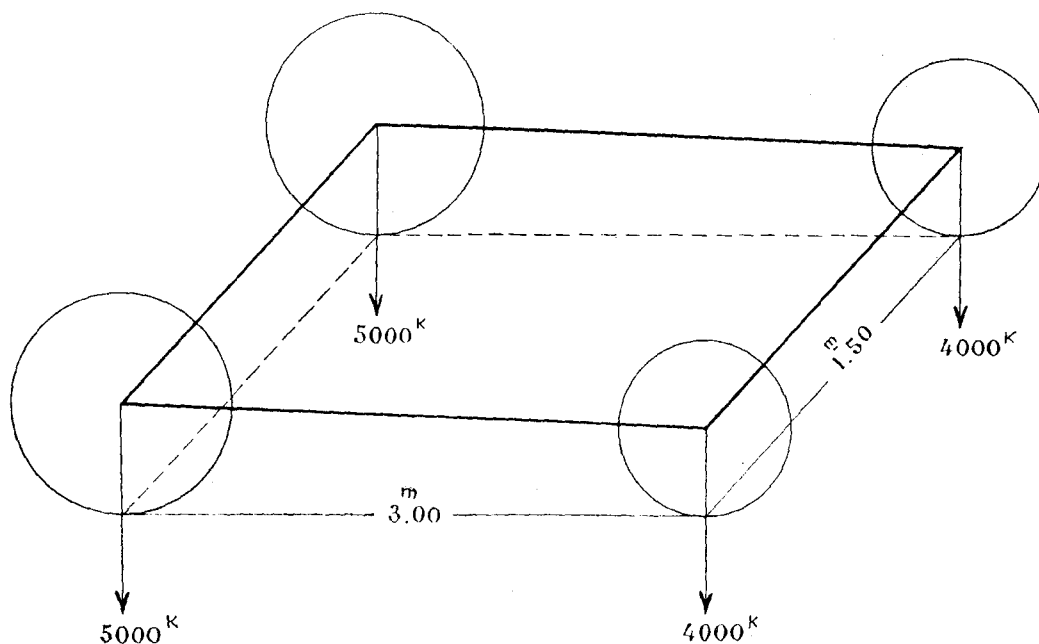


FIG. 98.

chaque roue; la jante des roues a 0^m20 de largeur, le chariot peut venir frôler la bordure du trottoir, c'est-à-dire que chaque paire de roues peut venir occuper par rapport aux longerons du pont qui sont écartés de 3 mètres la position donnée par la FIG. 99 (voir aussi la FIG. 90).

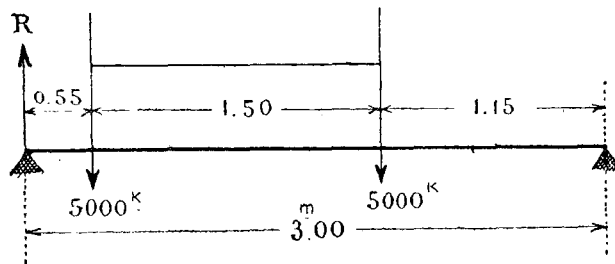


FIG. 99.

La charge maximum reportée sur chaque longeron par les roues chargées de 5000 kg. est donnée par l'équation :

$$3R = 5000 (2,65 + 1,15) \quad \text{d'où} \quad R = 6330 \text{ kgmes}$$

et pour les roues portant 4000 kgmes on a :

$$R = 5064 \text{ kgmes.}$$

Nous avons donc à considérer comme roulant sur chaque longeron un bicycle dont la roue d'avant porte 5064 kgmes et celle d'arrière 6330 kgr., soit en chiffres ronds 5100 et 6300 kgmes (voir FIG. 100).

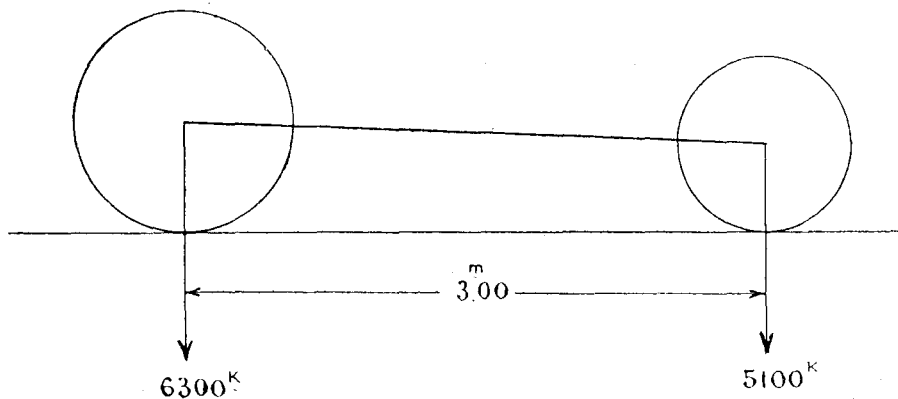


FIG. 100.

Nous déterminerons séparément les diagrammes de chaque charge dans ses diverses positions, et nous combinerons ensuite les diagrammes des deux charges en tenant compte qu'elles circulent à trois mètres de distance l'une de l'autre.

Nous divisons la culasse en 4 parties égales et la volée en 6 parties, ces parties ont approximativement 1^m50 de longueur. Nous supposons que chaque charge, 5100 et 6300 kgmes, vienne successivement occuper chacune des positions EFGHK et M (FIG. 101), nous n'étudierons pas ici le cas des charges en I et L.

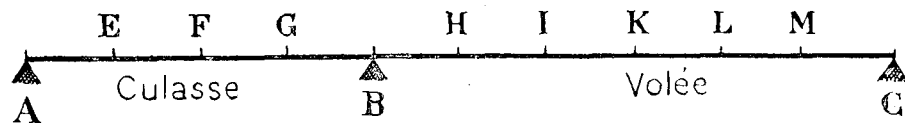


FIG. 101.

Nous appliquons les formules (13) à (15) et celles (16) à (18), et représentant la charge locale par P nous obtenons les résultats consignés dans le tableau ci-dessous :

DÉSIGNATION	RÉACTION EN A R	RÉACTION EN B S	RÉACTION EN C V
Charge locale en E	+ 0,70266 P	+ 0,32942 P	— 0,03208 P
» » en F	+ 0,42426 P	+ 0,62707 P	— 0,05133 P
» » en G	+ 0,18373 P	+ 0,86119 P	— 0,04492 P
» » en H	— 0,11197 P	+ 1,02117 P	+ 0,09076 P
» » en K	— 0,16493 P	+ 0,77665 P	+ 0,38824 P
» » en M	— 0,07126 P	+ 0,28622 P	+ 0,78504 P

Le bicycle de la FIG. 100 s'engage sur le longeron en marchant de A vers C.

1° La charge 5100 kgrmes arrive en E, on a :

$$R = + 0,70266 \times 5100 = + 3584 \text{ kgmes}$$

$$V = - 0,03208 \times 5100 = - 164 \text{ kgmes.}$$

Le moment fléchissant en E est :

$$\text{Mom. E} = + 3584 \times \frac{6,12}{4} = + 5484 \text{ kgmètres.}$$

Le moment fléchissant en B est :

$$\text{Mom. B} = -164 \times 9,03 = -1481 \text{ kgmètres.}$$

Le diagramme correspondant à ce cas est celui AJNC (PL. XX), diagramme très facile à tracer puisqu'il ne se compose que de trois lignes droites.

2° La charge 5100 kg. arrive en F :

$$R = + 0,42426 \times 5100 = + 2164 \text{ kgmes}$$

$$V = - 0,05133 \times 5100 = - 262 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en F} = + 2164 \times \frac{6,12}{2} = + 6622 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en B} = - 262 \times 9,03 = - 2366 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons le diagramme de ce cas.

3° La charge 5100 kgmes arrive en G et celle 6300 kgmes en E :

$$R = + 0,70266 \times 6300 + 0,18373 \times 5100 = + 5364 \text{ kgmes}$$

$$V = - 0,03208 \times 6300 - 0,04492 \times 5100 = - 431 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en E} = + 5364 \times \frac{6,12}{4} = \dots\dots + 8207 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en G} = + 5364 \times \frac{3}{4} \times 6,12 - 6300 \times \frac{6,12}{2} = + 5343 \text{ kgm.}$$

$$\text{Mom. en B} = - 431 \times 9,03 = \dots\dots\dots - 3892 \text{ kgm.}$$

Nous traçons le diagramme correspondant à ce cas.

4° La charge 5100 arrive sur l'appui B et celle 6300 est en F :

$$R = + 0,42426 \times 6300 = + 2673 \text{ kgmes}$$

$$V = - 0,05133 \times 6300 = - 323 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en F} = + 2673 \times \frac{6,12}{2} = + 8179 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en B} = - 323 \times 9,03 = - 2917 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons le diagramme.

5° La charge 5100 arrive en H et celle 6300 kgmes en G :

$$R = + 0,18373 \times 6300 - 0,11197 \times 5100 = + 586 \text{ kgmes}$$

$$V = - 0,04492 \times 6300 + 0,09076 \times 5100 = + 180 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en G} = + 586 \times \frac{3}{4} \times 6,12 = \dots\dots\dots + 2690 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en B} = + 586 \times 6,12 - 6300 \times \frac{6,12}{4} = - 6053 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en H} = + 180 \times \frac{5}{6} \times 9,03 = + 1355 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons le diagramme.

6° La charge 5100 arrive en K et celle 6300 en H :

$$R = - 1546 \text{ kgmes}$$

$$V = + 2552 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en B} = - 1546 \times 6,12 = \dots\dots\dots - 9461 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en K} = + 2552 \times \frac{9,03}{2} = \dots\dots\dots + 11522 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en H} = + 2552 \times \frac{5}{6} \times 9,03 - 5100 \times \frac{9,03}{3} = + 3849 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons le diagramme.

7° La charge 5100 arrive en M et 6300 en K :

$$R = - 1402 \text{ kgmes}$$

$$V = + 6450 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en B} = - 1402 \times 6,12 = - 8580 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en M} = + 6450 \times \frac{9,03}{6} = + 9707 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en K} = + 6450 \times \frac{9,03}{2} - 5100 \times \frac{9,03}{3} = + 13770 \text{ kgm.}$$

Nous traçons le diagramme.

8° La charge 5100 délaïsse le longeron et celle 6300 vient en M :

$$R = - 449 \text{ kgmes}$$

$$V = + 4946 \text{ kgmes}$$

$$\text{Mom. en B} = - 449 \times 6,12 = - 2747 \text{ kgmètres}$$

$$\text{Mom. en M} = + 4946 \times \frac{9,03}{6} = + 7444 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons le diagramme.

Ayant les diagrammes dans huit positions différentes du bicycle roulant il suffit, sur la PL. XX, de prendre l'enveloppe de ces huit diagrammes pour avoir en chaque section du longeron le moment maximum qu'y peut développer le chariot de 18 tonnes franchissant le pont.

* * *

77. Charge uniforme équivalente. — La recherche que nous venons de faire du diagramme enveloppe de la charge roulante n'est pas compliquée mais elle est un peu longue.

Pour un premier calcul (un calcul approximatif ainsi qu'on en

exécute au préalable pour toute construction) on peut simplifier les choses, pour cela recherchons la charge uniforme qui peut remplacer la charge roulante.

Comme nous sommes dans l'approximatif nous pouvons faciliter les calculs en remplaçant le bicycle de la FIG. 100 par un bicycle dont chaque roue porterait 6000 kg. et nous supposerons que les travées de culasse et de volée sont indépendantes, c'est-à-dire discontinues sur l'appui central; de plus nous admettrons qu'elles ont en chiffres ronds 6 et 9 mètres de portée.

Considérons la culasse (FIG. 102) et le bicycle occupant une position quelconque sur cette travée, le diagramme de la charge roulante a la forme ABCD, la charge uniforme équivalente est celle qui en la section E produit le même moment EC.

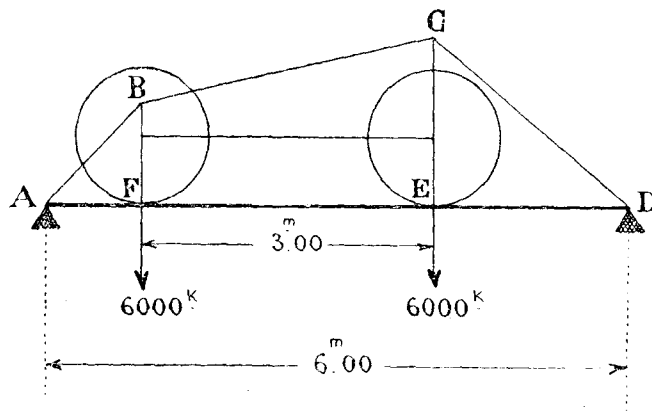


FIG. 102.

En étudiant diverses positions du bicycle sur la travée on trouve que celle correspondant à $AF = ED = 1^m50$, c'est-à-dire la position centrale, donne la valeur maximum pour la charge uniforme équivalente, dans ce cas en a :

$$FB = EC = 6000 \times 1^m50 = 9000 \text{ kgmètres}$$

nommant p la charge uniforme équivalente par unité courante on trouve :

$$3p \times 1,5 - p \times \frac{1,5^2}{2} = 9000 \quad \text{d'où} \quad p = 2666 \text{ kg.}$$

soit en chiffres ronds :

$$p = 2700 \text{ kgmes.}$$

Pour la volée c'est également lorsque le bicycle est dans la position centrale que la charge uniforme équivalente atteint la plus grande valeur (FIG. 103), on a :

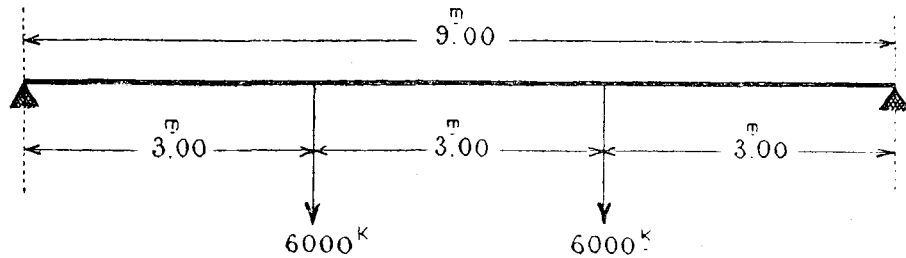


FIG. 103.

$$\frac{9}{2} p \times 3 - p \times \frac{3^2}{2} = 6000 \times 3 \quad \text{d'où} \quad p = 2000 \text{ kgms.}$$

Nous trouvons donc que l'effet de la charge roulante de 18 tonnes franchissant le pont est sensiblement le même que celui d'une charge uniforme de 2700 kg. par mètre courant sur la culasse et 2000 k. sur la volée, en d'autres termes l'enveloppe des diagrammes de ces deux charges uniformes est sensiblement la même que l'enveloppe des diagrammes trouvés ci-dessus par la charge roulante.

Il est à remarquer que nous disons l'enveloppe des diagrammes des charges uniformes et non leur somme.

Nous avons à vérifier la proposition ci-dessus.

Pour cela déterminons d'abord le diagramme de la charge uniforme 2700 kgmes agissant sur la travée de culasse seule (FIG. 104), nous appliquons la formule (19) :

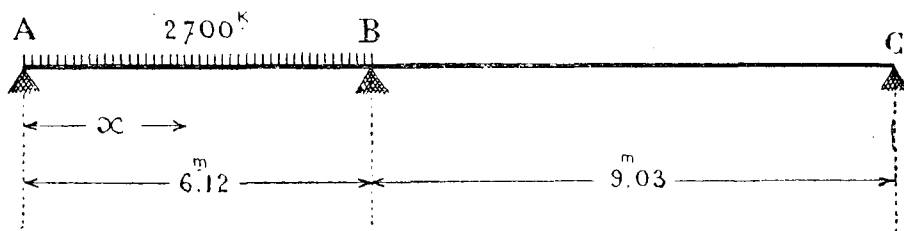


FIG. 104.

$$R = \frac{pl}{2} - \frac{pl^2}{8(l+L)} = \frac{2700 \times 6,12}{2} \left[1 - \frac{6,12}{4 \times 15,15} \right] = + 7428 \text{ kg.}$$

La réaction en C nous est donnée par la formule (22) en y faisant $q = 0$:

$$V = -\frac{pl^3}{8L(l+L)} = -\frac{2700 \times \overline{6,12}^3}{8 \times 9,03 \times 15,15} = -565 \text{ kgmes}$$

Mom. en B = $-565 \times 9,03 = -5102$ kgmètres.

Le moment fléchissant en une section à la distance x de A a pour valeur :

$$M_x = 7428 x - 2700 \frac{x^2}{2}$$

Son maximum est donné par l'équation :

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 \quad \text{d'où} \quad x = 2,751$$

et ce maximum est

$$M_{\max} = 7428 \times 2,751 - \frac{2700}{2} \times \overline{2,751}^2 = +10217 \text{ kgmètres.}$$

Sur la longueur AB le diagramme est une parabole, nous pouvons aisément la tracer, sur la travée BC c'est une droite, ce diagramme est tracé en traits doubles sur la PL. XX.

Passons à la travée de volée BC qui porte une charge de 2000 kgmes par mètre courant.

La réaction en A nous est donnée par la formule (21) en y faisant $p = 0$.

$$R = \frac{-qL^3}{8l(l+L)} = \frac{-2000 \times 9,03^3}{8 \times 6,12 \times 15,15} = -1985 \text{ kgmes.}$$

La réaction en C est donnée par la formule (22) en y faisant $p = 0$:

$$V = \frac{qL}{2} - \frac{qL^3}{8L(l+L)} = \frac{2000 \times 9,03}{2} \left[1 - \frac{9,03^2}{4 \times 15,15} \right] = +7684 \text{ kgmes.}$$

Le moment à la distance x de l'appui C a pour valeur :

$$M_x = 7684 \times x - \frac{2000 x^2}{2}$$

Son maximum a lieu pour $x = 3,842$ et a pour valeur :

$$M_{\max} = +14761 \text{ kgmètres}$$

Mom. en B = $-1985 \times 6,12 = -12148$ kgmètres.

Nous traçons (Pl. XX) en traits doubles le diagramme correspondant à ce cas.

Prenant l'enveloppe des deux derniers diagrammes, nous obtenons la ligne ANOPQRSC, et nous constatons que cette enveloppe coïncide très sensiblement avec celle des diagrammes divers de la charge roulante.

La marche que nous venons d'indiquer donne donc un moyen commode et suffisamment exact (tout au moins pour un premier calcul) de remplacer la charge roulante par une charge uniforme et ainsi simplifier les calculs.

* * *

78. Il importe de vérifier si la charge roulante au passage du pont ne peut pas provoquer le relèvement des extrémités de culasse ou de volée de dessus leurs appuis.

Nous pouvons voir ci-avant (au n° 76) que le maximum de réaction négative engendrée par le chariot de 18 tonnes à l'extrémité de la culasse est de 1546 kg., et à l'extrémité de la volée de 431 kgmes.

Le signe négatif de ces réactions indique que les extrémités du longeron sont sollicitées par ces forces (1546 kg. et 431 kg.) dans la direction de bas en haut.

Or le calage opéré lors de la fermeture du pont a développé à l'extrémité de la culasse une réaction positive de 3562 kgmes et à l'extrémité de la volée une réaction positive de 2414 kg. (voir n° 75) lesquelles réactions dépassant celles négatives dues au chariot, démontrent qu'il n'y a aucun danger que ces extrémités quittent leurs appuis, elles y resteront appliquées avec une force qui au minimum sera pour l'extrémité de culasse égale à :

$$+ 3562 - 1546 = + 2016 \text{ kgmes.}$$

et pour l'extrémité de volée

$$+ 2414 - 431 = + 1983 \text{ kgmes.}$$

En définitive donc, quoiqu'il arrive, le pont restera toujours bien appuyant sur ses culées; s'il en était autrement, si la réaction négative maximum due à la charge roulante dépassait celle positive due au calage il faudrait augmenter l'énergie de celui-ci (c'est-à-dire relever

les extrémités plus que ce qui a été fait) de façon à dépasser coûte que coûte les réactions négatives et avoir comme résultantes des réactions positives, en effet si les réactions négatives dépassent celles positives, cela signifie qu'au passage du chariot les extrémités du pont se soulèveront de dessus leurs appuis puis retomberont, d'où des chocs excessivement destructeurs pour le pont et ses maçonneries, chocs qu'il faut absolument éviter.

* * *

79. Le pont porte la surcharge uniforme. — La charge uniforme stipulée par le Cahier Général des charges de l'Etat Belge est de 400 kgmes par mètre carré de tablier du pont, trottoirs compris.

Dans le cas que nous étudions, le mètre courant de longeron porte deux mètres carrés de tablier, donc recevra 800 kgmes.

Nous ne nous arrêterons pas à étudier les effets de cette charge uniforme, car ils sont évidemment inférieurs à ceux du chariot de 18 tonnes (voir n° 77), et d'ailleurs cette étude ne comporte rien de nouveau en ce qui concerne les méthodes de calcul.

Si l'on veut déterminer la répartition de la charge uniforme donnant, dans les diverses sections, les maximums de fatigue, il suffira de remplacer la charge uniforme par une série de charges locales, de tracer pour chacune d'elles le diagramme des moments fléchissants (comme nous l'avons fait pour la charge roulante) et additionner pour chaque section la série des diagrammes de même signe.

Il arrive que pour certains ponts tournants de routes, l'Etat Belge n'impose pas le chariot de 18 tonnes et se contente de l'épreuve au moyen de la charge uniforme de 400 kilgs. par mètre carré de tablier, tel a été notamment le cas pour les ponts tournants construits récemment sur le canal du *Centre*.

* * *

80. Diagramme des maxima. — Au point où nous en sommes de nos calculs nous avons à résumer.

Pour déterminer le diagramme des moments maxima, nous prenons (PL. XIX) le diagramme AK_1GC du pont vide, fermé et calé de la façon la plus favorable (n° 75), nous lui superposons le diagramme

ANOO'B'C (PL. XX) enveloppe de la charge roulante (ou plutôt de la charge uniforme équivalente) passant sur la culasse, et aussi le diagramme AB''R'RSC enveloppe de la charge roulante sur la volée, ces superpositions sont faites PL. XXI où ces trois diagrammes sont numérotés de 1 à 3.

Pour déterminer les maxima nous additionnons les ordonnées de même signe de ces diagrammes en remarquant toutefois que ceux n° 2 et n° 3 ne peuvent exister simultanément puisque le chariot de 18 tonnes se trouve successivement sur l'une et l'autre travée.

De A à D nous additionnons les parties positives de 1 et 2, de D à E les parties négatives de 1 et 3, de E à F les négatifs de 1 et 3, de F à G les négatifs de 1 et 2, de G à B les positifs de 1 et 3, et nous obtenons ainsi le diagramme des maxima pour le pont fermé, calé comme dit ci-dessus et livrant passage à la charge roulante de 18 tonnes, ce diagramme est celui ACHIJKNB ; à ce diagramme nous superposons celui AKEC (PL. XVIII) du pont ouvert et nous obtenons le diagramme ACLMNKB qui est celui des plus grands maxima, que le pont soit ouvert ou fermé pourvu bien entendu que le calage soit établi ainsi que dit précédemment, c'est à dire que les relèvements soient (voir n° 72, 73 et 75) :

à la culasse $8.2 + 0.6 = 8.8$ millimètres.

à la volée $16.3 + 1.3 = 17.6$ id.

ce qui correspond à des efforts de calage de :

3562 kgmes à la culasse.

et 2414 kgmes à la volée.

La réserve que nous venons de faire quant à l'intensité du calage exige une explication : un calage développant 3562 kg. à la culasse et 2414 kg. à la volée est en somme une opération de précision, et en pratique on ne peut pas compter sur semblable précision, on doit évidemment prendre ses mesures pour la réaliser autant que possible mais on ne peut pas espérer l'atteindre, on doit dans ses calculs prévoir l'hypothèse d'un calage différent de celui qui correspond à la perfection, on doit en un mot prévoir le cas d'un calage trop fort ou trop faible.

81. Calage trop fort. — C'est celui qui correspond à l'instant où le pont calé cesse d'être en contact avec le pivot, il est impossible d'avoir un calage plus fort car on en serait immédiatement averti par le choc qui se produirait entre le pont et le pivot au moment du décalage, ce calage au maximum correspond à $S = 0$ et nous avons (FIG. 105) :

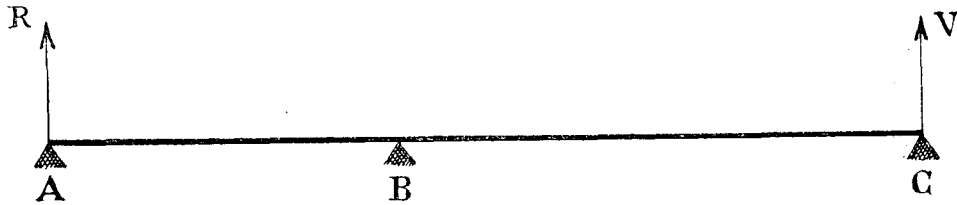


FIG. 105.

$$R + V = \frac{1270}{2} (6.12 + 9.03) + 2800 = 12420^k25.$$

$$R \times 6.12 = V \times 9.03$$

d'où :

$$R = 7402.95$$

$$V = 5017.30$$

$$\text{Mom. en B} = 5017.3 \times 9.03 = 45306 \text{ kgmètres.}$$

Nous traçons (PL. XIX) ce diagramme ADC correspondant à ce calage et l'additionnant avec le diagramme AKEC du pont ouvert, nous obtenons le diagramme AFLC du pont fermé et calé au maximum, ce diagramme AFLC est en somme celui de la poutre AC portant sur ses seuls appuis extrêmes, A et C, et supportant la charge uniforme $\frac{1270}{2}$ kgmes par mètre courant et la charge locale 2800 kgms du contrepoids, calculant directement le diagramme de semblable poutre on tombera sur AFLC.

Nous reportons sur la PL. XXII le diagramme AFLC que nous venons d'obtenir, nous traçons sur cette même planche les diagrammes enveloppes des charges roulantes, diagrammes obtenus PL. XX, nous additionnons AFLC avec les parties positives des diagrammes de la charge roulante, c'est à dire ANO' pour la culasse et CSR' pour la volée, nous obtenons AN'O''FR''LSC qui est le maximum pour le pont fermé, calé au maximum et livrant passage à la charge de 18 tonnes ; prenant l'enveloppe de ce dernier diagramme et

de celui AKEC (PL. XVIII) du pont ouvert, on obtient (PL. XXII) le diagramme AN'VE'R''S'C qui est celui des plus grands maxima dans le cas d'un calage trop fort.

* * *

82. Calage trop faible. — Le calage trop faible correspond au cas où le pont ferait entendre des chocs au passage du chariot de 18 tonnes, ce qui deviendra possible à partir du moment où la réaction positive due au calage serait égale à la plus grande réaction négative produite par le passage du chariot, or cette réaction négative la plus grande est (en prenant les charges uniformes équivalentes à la charge roulante, voir n° 77) :

- 1985 kg. au bec de la culasse.
- 565 kg. au bec de la volée.

De là il résulte immédiatement que le calage à l'extrémité de la culasse ne peut être inférieur à 1985 kg., et par conséquent celui à l'extrémité de la volée ne peut être moindre que (voir n° 73) :

$$\frac{1985 \times 6.12}{9.03} = 1345 \text{ kg. 3.}$$

Le moment sur l'appui central provoqué par ces calages minimum est :

$$1985 \times 6.12 = 12148 \text{ kgmètres}$$

et le diagramme correspondant est celui AGC (PL. XXIII), additionnant algébriquement ce diagramme avec celui AKEC du pont ouvert, nous obtenons celui du pont fermé, calé au minimum, nous le reproduisons sous le n° 1 à droite de la PL. XXIII.

Opérant sur ce diagramme n° 1 et sur les diagrammes n° 2 et n° 3 des charges roulantes ainsi que nous venons de l'expliquer au n° 80 et PL. XXI, nous obtenons comme diagramme des maxima dans le cas du pont fermé celui en traits doubles AHIEJLC (PL. XXIII), lui superposant le diagramme AKEC du pont ouvert, nous obtenons le diagramme en traits doubles AHIEJLC qui est celui des plus grands maxima dans le cas du calage trop faible.

Comparant les trois diagrammes des maxima : celui du n° 80 et PL. XXI correspondant au calage normal (voir n° 75), celui du n° 81 et

PL. XXII correspondant au calage trop fort, enfin celui du n° 82 et PL. XXIII correspondant au calage trop faible, nous voyons que le plus défavorable est celui du calage trop fort, c'est donc d'après celui-là que le pont doit être calculé.

* * *

83. Calage le meilleur en tenant compte des charges roulantes. — On voit que pour mettre le pont dans les meilleures conditions de résistance il est préférable de se rapprocher du calage trop faible, c'est-à-dire dans le cas particulier qui nous occupe, caler :

à la culasse à raison de 1985 k.
à la volée à raison de 1345 k.

Ce sont des calages plus faibles que ceux correspondant aux trois appuis de niveau, nous avons vu que dans ce cas les calages étaient :

à la culasse de 3305 k.
à la volée de 2240 k.

Théoriquement il faut donc caler de façon que les deux appuis extrêmes soient en-dessous du niveau de l'appui central, mais comme les blocs de calage sont exposés à s'user ce qui diminue l'énergie du calage et qu'il faut à tout prix éviter le danger d'un calage trop faible et les chocs qui en peuvent résulter il est préférable en pratique de caler de niveau, ou même de caler comme dit au n° 75.

* * *

84. Notre étude porte sur un pont tournant existant, la section du longeron est donnée FIG. 90 et le profil longitudinal de l'âme de ce longeron est donné FIG. 92.

Les moments résistants de ce longeron calculés à raison d'une fatigue de 6 kgmes par millimètre carré sont :

Pour la section de 430 de hauteur, 28266 kgmètres.
Pour celle de 555 de hauteur, 37716 kgmètres.
Pour celle de 680 de hauteur, 47520 »
Pour celle de 512 de hauteur, 36222 »
Pour celle de 345 de hauteur, 22068 ».

Nous traçons avec ces résultats sur la PL. XXII le diagramme ATUXC des moments résistants du longeron, nous voyons qu'il dépasse notablement celui AN'VER''S'C des plus grands moments fléchissants possibles, il le dépasse même beaucoup trop, en d'autres termes le pont qui fait l'objet de notre étude est établi avec beaucoup trop de solidité : ainsi la section au pivot présente un moment résistant de 47520 kgmètres tandis que le moment fléchissant maximum n'est que de 25892 kgmètres, donc la fatigue réelle du fer n'est que de :

$$6 \times \frac{25892}{47502} = 3^{\text{K}}3 \text{ par millimètre carré,}$$

ce qui est vraiment trop peu ; le pont qui fait l'objet de notre étude a été en réalité mal proportionné, le longeron contient trop de fer.

* * *

85. Longerons à section variable. — Les formules et les calculs précédents ont été établis en supposant que le longeron avait un moment d'inertie constant, le résultat final auquel nous arrivons, c'est-à-dire le diagramme maximum de la PL. XXII, démontre que cette supposition sera très sensiblement réalisée en exécution, en effet sur la majeure partie de la longueur du longeron le moment résistant oscille de 24900 à 30600 kgrmètres seulement, ce n'est que tout à fait vers les extrémités qu'il peut diminuer dans de fortes proportions, or ce ne sont pas des variations dans ces limites qui peuvent infirmer l'exactitude *bratique* des résultats obtenus en supposant le moment d'inertie constant, c'est donc dans l'hypothèse du moment d'inertie constant que les ponts tournants peuvent en règle générale être calculés.

En définitive il est assez peu utile de compliquer la théorie et les formules des ponts tournants en y introduisant la supposition d'un moment d'inertie variable.

* * *

86. Le calcul des chevêtres. — La section d'une entretoise de chevêtre est donnée FIG. 93.

Son moment résistant à raison de 1 kgme de fatigue par millimètre carré est de 4457 kilogrammètres.

Le pont étant ouvert les extrémités des chevêtres portent :

$$\frac{1270}{2} (6.12 + 9.03) + \frac{5600}{2} = 12420^k 25.$$

soit pour chaque extrémité 6210 kgs, d'où un moment fléchissant :

$$6210 \times 1,5 = 9315 \text{ kgmètres}$$

donc une fatigue de :

$$\frac{9315}{4457} = 2^k 1 \text{ par millimètre carré.}$$

Nous avons maintenant à étudier le cas du pont fermé.

Dans les ponts tournants importants on établit au droit du pivot et sous les longerons principaux des chassiss de calage de façon qu'après fermeture les entretoises de chevêtres, de même que le pivot, sont mis hors cause, ne reçoivent pas des charges, donc ne fatiguent pas (*), tel n'est pas le cas pour le pont que nous étudions et nous avons à rechercher la fatigue des chevêtres après fermeture du pont.

Cette fatigue sera maximum par le pont calé au minimum, car c'est ce calage qui donne l'effort tranchant maximum au droit du pivot, voir n° 82.

L'effort tranchant au pivot, côté culasse, le pont étant vide et calé au minimum, sera :

$$\frac{1270}{2} \times 6.12 + 2800 - 1985 = 4701^k 20$$

et côté volée :

$$\frac{1270}{2} \times 9.03 - 1345.3 = 4388^k 75.$$

A ces efforts tranchants il faut ajouter ceux provoqués au passage du chariot de 18 tonnes, ces efforts sont maximum lorsque le bicycle a sa roue d'avant en H et celle d'arrière en G (FIG. 101), on a alors comme valeur de l'effort tranchant au pivot côté culasse :

$$6300 - 586 = 5714 \text{ kgmes}$$

et côté volée :

$$5100 - 180 = 4920 \text{ kgmes.}$$

(*) Il peut arriver que ces calages au droit du pivot provoquent le décalage aux extrémités, il faut donc n'en user qu'avec prudence.

Combinant les effets du pont vide avec ceux de la charge roulante on a comme effort tranchant maximum :

$$\text{Côté culasse : } 4701.20 + 5714 = 10415^k20$$

$$\text{Côté volée : } 4388^k75 + 4920 = 9308^k75.$$

Le moment fléchissant maximum sur une traverse de chevêtre est donc :

$$10415 \times 1^m50 = 15622 \text{ kgmètres}$$

et la fatigue est :

$$\frac{15622}{4457} = 3^k50 \text{ par millimètre carré.}$$

* * *

87. Le calcul du pivot. — En ce qui concerne le pivot il y a à calculer :

- a) La surface de la pierre de taille servant de base au pivot.
- b) La surface de contact entre la base du pivot et sa pierre de taille.
- c) La section du pivot.
- d) Les lentilles du pivot.
- e) La chapeau du pivot.
- f) Les boulons de suspension de la crapaudine au chapeau.
- g) La crapaudine du pivot.
- h) L'attache de la crapaudine aux traverses de chevêtre.

Nous ne nous occuperons que des lentilles du pivot, le calcul des autres pièces ne présente aucune particularité sur laquelle il y ait lieu d'insister ici.

Les lentilles constituent la partie sur laquelle le pont décalé repose et tourne, c'est l'âme du pont.

Il importe que la pression par unité entre les deux lentilles ne dépasse pas un certain taux ou sinon l'huile de graissage est expulsée d'entre les deux lentilles, le métal vient en contact sans intermédiaire de lubrifiant, et lors de la rotation les lentilles grippent, elles pénètrent l'une dans l'autre et le pont refuse de tourner, cela se rencontre plus souvent qu'on ne le croirait.

La surface plane de contact entre les deux lentilles doit être calculée de façon que la charge par millimètre carré ne dépasse pas 6 kilogrammes.

Le poids total de la partie tournante de notre pont est :

$$12420.25 \times 2 = 24840^k50$$

il faut donc pour les lentilles une surface plane de :

$$\frac{24840.50}{6} = 4140 \text{ millim. carrés.}$$

En réalité on leur a donné un diamètre de 10 centimètres ce qui correspond à une surface de 7854 millimètres carrés, donc à une pression de :

$$\frac{24840.5}{7854} = 3^k2 \text{ par millimèt. carrés.}$$

Nous disons ci-dessus qu'il faut que les lentilles portent l'une sur l'autre par une surface plane, en effet il est certains ingénieurs qui donnent à leurs lentilles une surface courbe (les deux convexes, FIG. 107, ou bien l'une convexe et l'autre concave, FIG. 106), de cette façon la surface de contact se réduit à rien, le travail à développer pour la rotation du pont est théoriquement nul et la manœuvre se fait donc avec la plus grande facilité puisqu'il suffit de vaincre la force d'inertie, ce serait exact si la résistance à l'écrasement du métal des lentilles était indéfinie, ce qui n'est malheureusement pas; la surface de contact étant petite, la pression par unité est excessive, comme conséquence l'huile de graissage est expulsée et le métal des lentilles venant en contact s'écrase tout naturellement, les lentilles grippent, se détruisent aux premières rotations et contrairement aux prévisions théoriques de l'ingénieur le mouvement du pont devient bientôt très difficile et même quelquefois impossible.

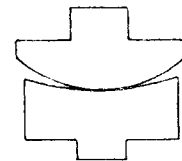


FIG. 106.

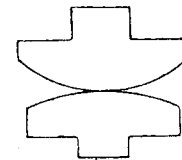


FIG. 107.

Il importe que non seulement l'huile ne soit pas expulsée d'entre les lentilles pendant la rotation du pont mais encore que cela ne se produise pas lorsque le pont est calé et livre passage à la charge roulante.

De nos calculs ci-dessus au n° 87 il résulte que lors du passage du chariot de 18 tonnes la charge maximum sur le pivot atteint

$$(4701.2 + 4388.75) 2 + (5714 + 4920) \frac{18000}{6300 + 5100} = 34970 \text{ kg.}$$

soit par millimètre carré :

$$\frac{34970}{4140} = 8^k5,$$

ce qui n'est pas exagéré, car il est à remarquer que cette pression ne se produit pas lorsque le pont est au repos.

Si elle était trop forte, ce ne serait pas un motif pour augmenter le diamètre des lentilles (car cela augmenterait la difficulté de rotation) mais ce serait un motif pour caler quelque peu les longerons au droit du pivot afin de soulager celui-ci.

Le calage au droit du pivot a pour avantage d'éviter une torsion du pont lorsque la charge roulante ne suit pas exactement l'axe longitudinal de celui-ci, toutefois n'en user qu'avec modération ainsi que nous le disons en note du n° 86.

* * *

88. Un point essentiel est d'assurer le bon graissage des lentilles, c'est-à-dire un afflux commode de l'huile en tous les points de leurs surfaces, à cet effet un trou de graissage vertical vient aboutir à une petite alvéole centrale d'où partent quatre rainures de graissage qui répartissent l'huile sur toute la surface des lentilles, autant que possible il convient que ces rainures aboutissent à un réservoir A (FIG. 108) qui retienne les huiles et puisse servir d'alimentation permanente.

L'alvéole centrale B des lentilles a non seulement pour effet de distribuer l'huile aux rainures radiales mais encore elle a pour grand avantage de supprimer le point mort des lentilles, suppression qui est absolument nécessaire car ce point mort peut être une cause de grippement.

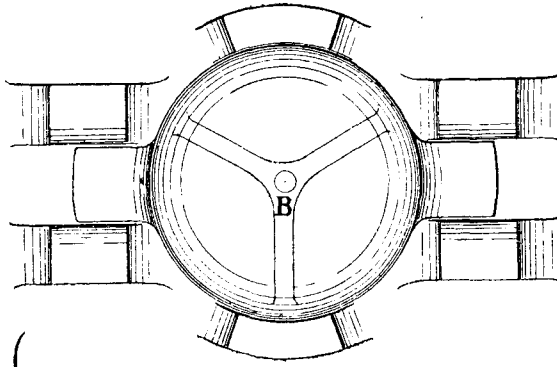
La lubrification doit se faire avec de l'huile grasse minérale, nous déconseillons l'huile végétale, elle est trop oxydable, elle donne trop de cambouis.

* * *

89. Il faut dans la disposition d'un pont tournant se ménager un moyen commode et facile d'accès aux lentilles pour les vérifier, les nettoyer et au besoin les renouveler.

* * *

Chapeau de pivot et lentille supérieure
vus du dessous.



Coupe par l'axe

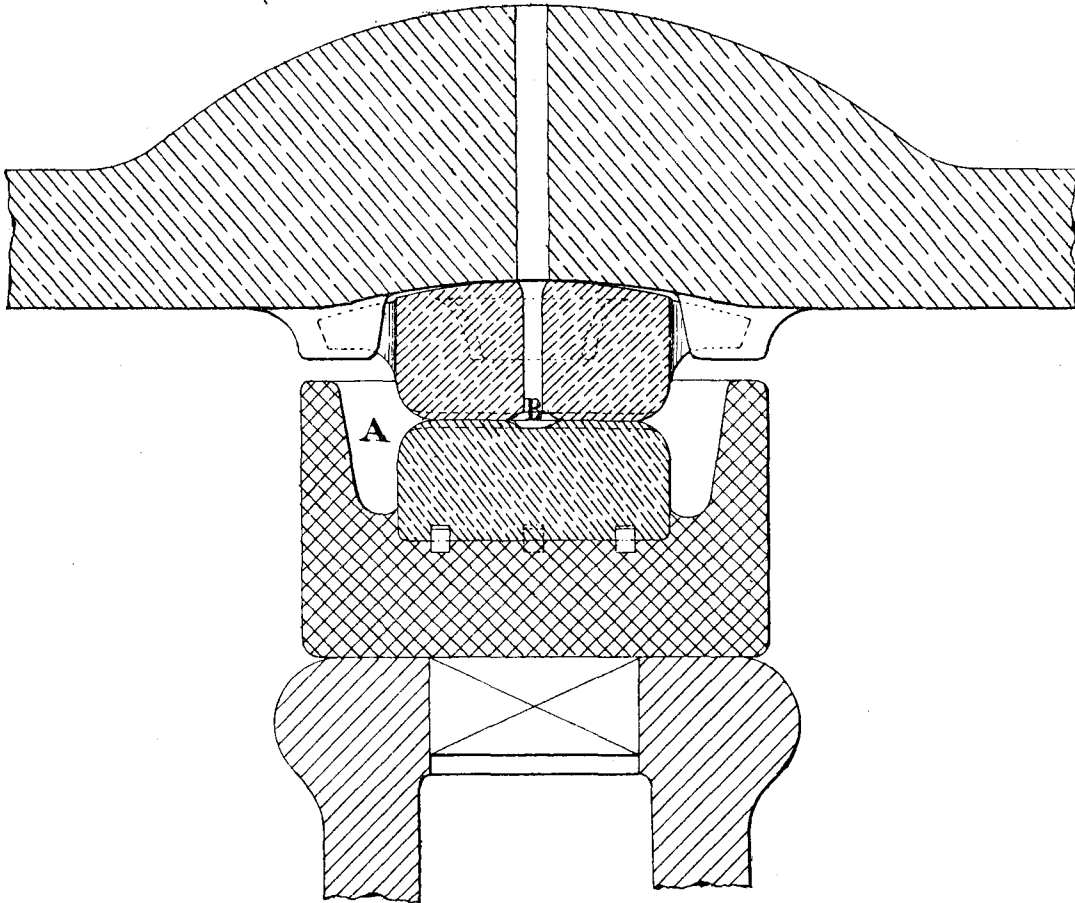


FIG. 108.

90. Nous avons vu ci-dessus (FIG. 106 et 107) que certains ingénieurs donnent aux lentilles des formes bombées, ces formes n'ont pas uniquement pour but, dans la pensée de leurs auteurs, de faciliter la rotation du pont (facilité fictive comme nous l'avons vu) mais encore de lui permettre un certain mouvement de bascule dans le sens longitudinal tout en lui conservant un bon appui sur le pivot, ce mouvement de bascule se produit au calage et décalage du pont, si les lentilles sont planes et que rien n'a été prévu pour la bascule du pont, il en résultera que celui-ci, par suite d'une légère différence dans l'équilibre de la volée et de la culasse, reportera l'axe de son appui au pivot en dehors de l'axe des lentilles et alors celles-ci auront une tendance à bailler (FIG. 109), la charge se concentrera sur une partie de leur surface, elles seront en danger de gripper et en tous cas la rotation se fera mal, pour éviter ces inconvénients il convient que le contact entre le chapeau du pivot et le dos de la lentille supérieure

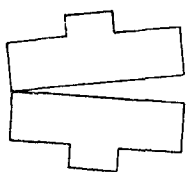


FIG. 109. soit établi par une surface bombée (FIG. 108) la bascule du pont (mouvement impossible à éviter dans certaines limites) pourra de cette façon se produire tout en conservant aux surfaces planes des lentilles un contact parfait, c'est-à-dire sans diminuer la facilité de rotation du pont, on réalisera ainsi l'avantage des lentilles bombées des FIG. 106 et 107 tout en évitant leur grand inconvénient.

* * *

91. Les lentilles des ponts tournants sont en acier trempé. L'acier employé est du Bessemer ou du Martin-Siemens martelé, on le prend de qualité relativement dure, quelquefois on prend de l'acier chromé.

Le lingot venant de l'aciérie doit avoir des dimensions telles qu'on n'ait plus à le retoucher à la forge, surtout plus à le refouler, cela dénaturerait l'acier. On tire du lingot au tour les deux lentilles requises, on les façonne complètement et les parachève sans toutefois y pratiquer les rainures de graissage, on les trempe ensuite dans l'huile ou dans un mélange d'huile et de graisse, on ne peut pas les tremper dans l'eau, elles seraient trop cassantes ; après trempe on y pratique les rainures au moyen d'une meule à émeri, si ces rainures étaient faites avant trempe elles pourraient lors de la trempe provoquer la rupture des

lentilles, ou tout au moins des fêlures dans leur masse, ce qui serait encore plus dangereux car la rupture en pourrait résulter en service.

Après trempe la surface des lentilles, qui était parfaitement plane avant, a toujours pris un certain gauchage, il faut donc les planer ce qui se fait au tour en usant le gauchage avec de l'éméri fin sur une feuille de cuivre, l'opération doit être conduite avec soin et avec la plus grande précision, car il faut que la surface de contact des lentilles soit mathématiquement plane et en outre polie comme une glace.

L'ingénieur chargé de l'exécution d'un pont tournant doit être de la dernière rigueur en ce qui concerne les lentilles, il doit vérifier :

a) Si l'acier est trempé suffisamment dur, cela se vérifiera avec une lime.

b) Si aucune fente n'a été produite par la trempe.

c) Si les rainures ne présentent aucune aspérité, si leurs bords sont bien arrondis.

d) Enfin si les surfaces sont d'un poli parfait et sont d'un plan mathématique, cette vérification se fera en enduisant l'une d'elles d'une légère couche de couleur et les appliquant l'une sur l'autre, il faut que la surface non enduite ait pris de la peinture en toutes ses parties.

Certains ingénieurs exécutent quelquefois une des lentilles en bronze, nous ne voyons aucun avantage à l'emploi de deux métaux, le bronze se comprend pour les coussinets car il serait impossible de les exécuter en acier trempé et poli, mais ce n'est pas le cas pour une lentille de pont tournant.

Comme les lentilles peuvent se casser au cours du montage d'un pont tournant on en exécute généralement deux paires.

* * *

92. Examinons le cas des lentilles pour un pont tournant lourd.

Soit un pont dont la partie tournante pèse 700 tonnes, la surface requise pour les lentilles est de :

$$\frac{700000}{6} = 117000 \text{ millim. carrés}$$

soit un diamètre de 386 millimètres.

L'exécution avec précision de lentilles de cette dimension est assez difficile, surtout du chef de la trempe.

On cherche généralement à réduire le diamètre.

Un premier moyen c'est de refouler l'huile entre les lentilles au moyen d'une pompe de pression, ce refoulement se fait pendant la durée des rotations et permet d'augmenter la charge par unité donc permet de diminuer le diamètre des lentilles.

Un autre moyen consiste à annexer au pivot une plaque tournante composée d'un chemin de roulement fixé sur la pile, d'un semblable fixé sous le pont et de galets intermédiaires, on reporte sur la plaque une partie du poids du pont ouvert et on ne conserve sur le pivot que la portion qu'il peut porter dans de bonnes conditions, cette portion doit être la plus grande possible car plus il y a de charge sur le pivot, moins il y en a sur les galets, et plus facile sera la manœuvre du pont.

La répartition de la charge entre le pivot et les galets se fait au moyen des boulons qui suspendent la crapaudine au chapeau du pivot, si on raccourcit ces boulons (en serrant les écrous) on décharge les galets et charge le pivot, et vice-versa.

Pour les ponts qui n'ont pas de galets de roulement, ni de calage au pivot (tel celui FIG. 90 à 95) les boulons de suspension servent à régler le calage des extrémités, en effet, si on raccourcit ces boulons l'intensité du calage aux extrémités diminue, si on les allonge elle augmente.

Pour les ponts qui n'ont pas de galets de roulement mais ont un calage au droit du pivot la manœuvre des boulons de suspension permet le réglage de ce calage, et quant à celui à chaque extrémité du pont on doit le régler en agissant directement sur le niveau des coussinets de calage.

Un dernier moyen que l'on emploie pour éviter des lentilles de trop fortes dimensions et aussi les plaques tournantes c'est de porter et faire tourner le pont sur un pivot hydraulique (voir *Annales des ponts et chaussées*, 1875, 1^{er} semestre et aussi *Portefeuille économique des Machines*, décembre 1887), dans le cas de pivot hydraulique il n'y a plus nécessité d'avoir des boulons de suspension (voir aussi les *Annales des Travaux Publics de Belgique*, juin 1900, p. 451).

* * *

Les plaques tournantes sous les ponts présentent d'assez nombreux inconvénients : elles sont coûteuses, il est difficile de les établir

et maintenir de façon que la charge porte uniformément sur tous les galets, le moindre tassement dérègle la plaque, les galets sont exposés à s'user inégalement, à s'écorner et se briser, enfin si ces effets se produisent il faut soulever le pont au moyen de verins pour retirer et renouveler les galets ou remettre la plaque de niveau.

De tout quoi il résulte qu'il ne faut employer les plaques tournantes qu'en cas d'absolue nécessité.

* * *

93. Le calcul des mécanismes. — Il y a les mécanismes de rotation, d'arrêt et de calage.

Leur calcul ne présente aucune difficulté spéciale et nous ne nous y arrêterons pas ici.

Nous appelons toutefois l'attention sur l'importance qu'il y a de les étudier avec le plus grand soin sous peine d'avoir un pont qui fonctionnera d'une façon défectueuse ou même refusera de fonctionner ; on est quelquefois enclin à les étudier avec peu d'attention et les exécuter avec peu de précision sous prétexte que ce sont des mécanismes rustiques, c'est une grave erreur, car s'ils sont rustiques il faut cependant remarquer qu'ils doivent mettre en mouvement des masses très considérables et exercer des efforts énergiques et pour ce faire dans de bonnes conditions il faut une étude soignée et une fabrication supérieure. Il faut notamment faire attention au tracé des roues d'engrenage, et éviter de soumettre les barres de transmission à des efforts de compression, il faut que les barres de commande du calage, du décalage et des mécanismes divers n'agissent jamais que par traction, si on les fait agir par compression la commande se fera toujours mal, car quelque bien guidées qu'elles soient intermédiairement les barres flamberont toujours un peu et par conséquent transmettront un effort insuffisant et un mouvement incomplet.

Il est à noter que le mécanisme de calage peut exclusivement être appliqué à un bout du pont, car le relèvement à ce bout suffit pour provoquer le calage à l'autre bout, ceci bien entendu lorsque le pivot n'est pas accompagné d'une plaque tournante car dans ce cas il faut un mécanisme de calage spécial à chaque extrémité du pont.

* * *

94. Vent. — Dans le calcul de la puissance requise pour la rotation du pont il importe, au cas où les travées de volée et de culasse sont inégales en surface, de tenir compte de la *force des vents*, en effet l'inégalité d'action du vent sur les deux parties du pont agira l'une fois dans le sens de la rotation, l'autre fois en sens contraire, et dans les deux cas il faut que le mécanisme de rotation soit assez puissant pour tenir facilement tête au vent à son maximum de violence.

Pour échapper à l'impedimenta du vent on pourrait régler la surface des deux travées de façon que quoique inégales en portée elles donnent cependant pour le vent le même moment par rapport au pivot, donc deux moments qui s'équilibrent.

* * *

95. Travail de la rotation. — Nous supposerons un pont qui tourne sur ses lentilles seules, donc ne reposant pas sur galets et cercles de roulement.

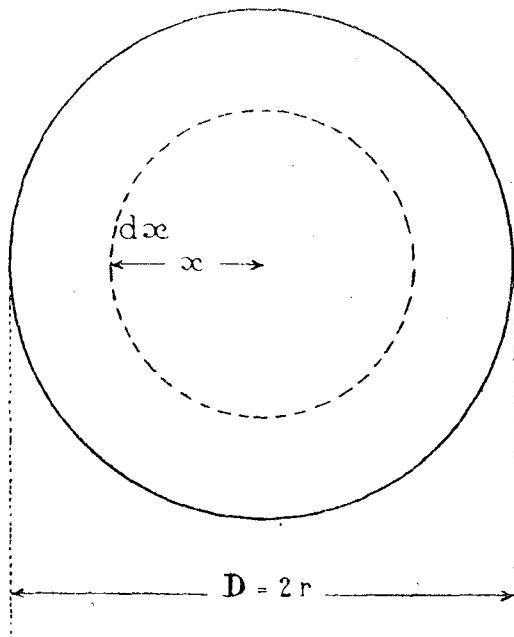


FIG. 110.

Soit $D = 2r$ le diamètre de la surface frottante des lentilles (FIG. 110) et P la charge totale qu'elles portent.

Le frottement total est fP .

Le frottement par unité est $\frac{fP}{\pi r^2}$.

Le moment infiniment petit du frottement sur la circonférence de rayon x est :

$$dM_x = \frac{fP}{\pi r^2} \times 2\pi x dx \times x.$$

Le moment total du frottement est :

$$M = \int_0^r dM_x = \frac{2r}{3} fP = \frac{1}{3} DfP.$$

Supposons que la vitesse de rotation du pont soit de n tours par minute, donc $\frac{n}{60}$ tours par seconde.

Le travail élémentaire en une seconde du frottement sur la circonférence de rayon x est :

$$dT_x = \frac{fP}{\pi r^2} \times 2\pi x dx \times 2\pi x \frac{n}{60}.$$

Le travail total *en une seconde* sur toute la superficie des lentilles est :

$$T = \int_0^r dT_x = \frac{4}{3} \pi r \frac{n}{60} fP = \frac{\pi D}{90} n fP$$

posant approximativement $\frac{\pi}{90} = \frac{1}{30}$, on a :

$$T = \frac{1}{30} D n fP = \frac{Mn}{10}$$

résultat qui, entre autres, nous indique que la manœuvre est d'autant plus difficile que D est plus grand.

* * *

96. Action du pontier. — Il y a tout d'abord lieu de rechercher si la manœuvre du pont tournant pourra être faite par le pontier agissant purement et simplement par poussée à l'extrémité de la culasse, ou s'il faudra recourir à un mécanisme de manœuvre.

Si l'on nomme L la longueur de la culasse, ce qui est le bras de levier de l'action du pontier, et si l'on nomme p sa puissance de poussée, le moment de cette poussée sera pL , et pour que le démarrage du pont puisse se produire il faut :

$$(1) \quad pL = M = \frac{1}{3} DfP.$$

Le coefficient de frottement f peut être pris égal de 0,10 à 0,15.

Il résulte d'expériences que nous avons faites que l'action d'un homme bien arcbuté sur ses pieds et poussant contre un obstacle fixe est en moyenne de 40 kgs.

Il est d'ailleurs à noter que le départ du pont est facilité par la réaction du tampon de choc à ressort et surtout par l'action du levier de manœuvre dont se sert le pontier pour vaincre la première inertie ou le frottement du départ.

Comme après le démarrage il faut imprimer à la masse du pont

une certaine accélération, il convient de n'introduire dans la formule (1) que les chiffres les plus défavorables, c'est-à-dire prendre pour p la moitié de 40 kgs et pour f le frottement le plus élevé, 0,15, ce qui nous donne :

$$(2) \quad 400 L = DP.$$

Voilà la relation nécessaire pour qu'un homme puisse mettre le pont en mouvement, si cette relation n'est pas satisfaite il faut recourir à un mécanisme; soit dit en passant il ne faut se résigner aux mécanismes qu'à la toute dernière extrémité (surtout pour les ponts en rase campagne) car ils sont sujets à se détraquer et en somme ils donnent toujours une manœuvre relativement lente.

* * *

97. Durée de la manœuvre d'ouverture et fermeture. — Il importe de rechercher la durée de la manœuvre d'ouverture du pont, car il convient que cette durée soit la plus petite possible.

Le travail (par seconde) d'ouverture (et par conséquent de fermeture) a pour valeur :

$$T = \frac{Mn}{10}$$

Supposons que l'ouverture doive se faire en N minutes, cette ouverture correspond généralement à un quart de tour, donc le pont fait $\frac{1}{4N}$ tour par minute, d'où pour expression du travail :

$$(3) \quad T = \frac{M}{40N}$$

Voilà le travail en kilogrammètres par seconde que le pontier devra développer pendant N minutes (2 ou 3 minutes au grand maximum) et ce à la vitesse par seconde de :

$$\frac{2\pi L}{4 \times 60 N} \text{ mètres}$$

vitesse qui toujours est très faible.

Il résulte de nombreuses expériences qui ont été faites qu'un homme agissant pendant un temps très court et avec de longues périodes de repos (tel est le cas d'un pontier) peut développer par seconde :

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

THEORIE ANALYTIQUE DES POUTRES CONTINUES

§ 1. — Considérations générales.

Nos		Pages
1	Poutres encastrees	5
3	Formule de Clapeyron	8

§ 2. — Etude d'un pont continu.

4	Determination des moments flechissants sur les appuis	11
5	Diagrammes des moments flechissants	15
6	Determination des efforts tranchants sur les appuis et diagrammes de ces efforts	18
7	Determination du maximum des M et T en chaque section	20
8	Diagramme des moments maxima	24
9	Diagramme des efforts tranchants maxima	25
10	Determination de la section des brides et des barres de treillis de la poutre continue	26
11	Proportions des travées	29
12	Variation du moment d'inertie	30
13	Dénivellation des appuis	31
14	Economie	32
15	Surcharge partielle	32
16	Charges locales.	33

§ 3. — Cantilever.

§ 4. — Lignes d'influence.

CHAPITRE II.

THEORIE GRAPHIQUE DES POUTRES CONTINUES

§ 1. — Tracé de l'élastique d'une poutre sur deux appuis avec ou sans encastrement.

19-20	Théorie générale	38
-------	----------------------------	----

§ 2 — Elastique dans le cas d'appuis sans encastrement.

21-22	Charge uniforme	41
23-24	Charge locale	44

§ 3. — **Tracé de l'élastique et propriétés du polygone funiculaire dans le cas d'une poutre sur appuis encastrés.**

25-29	Charge uniforme. — Trisectrices. — Surface de charge et sa verticale — Lignes croisées — Echelles des tracés.	46
30-31	Charge locale	52
32	Efforts tranchants	57
33	Poutre encastrée ne portant aucune charge	58

§ 4. — **Propriétés géométriques des polygones funiculaires de deux travées successives non chargées d'une poutre continue.**

35	Antiverticale	60
36-37	Points homologues	61

§ 5. — **Polygones funiculaires de trois travées successives dont une chargée.**

38.	Relations entre les 3 polygones funiculaires	64
-----	--	----

§ 6. — **Polygones funiculaires de deux travées successives chargées.**

39	Relations entre les deux polygones.	65
----	---	----

§ 7. — **Poutre continue dont une travée est chargée.** 66

§ 8. — **Poutre continue, toutes les travées chargées.** 68

§ 9. — **Poutre continue à extrémités encastrées.** 71

§ 10. — **Poutres continues à extrémités en porte-à-faux.** 72

§ 11. — **Dénivellation des appuis.** 72

§ 12. — **Calcul d'un pont à trois travées continues.** 76

49	Moments	76
----	-------------------	----

52	Efforts tranchants	78
----	------------------------------	----

§ 13. — **Moments fléchissants maximum.** 83

§ 14. — **Efforts tranchants maximum.** 88

CHAPITRE III.

PONTS TOURNANTS

§ 1. — **Formules Générales.** 89

§ 2. — **Description.** 99

§ 3. — **Calculs.** 100

68	Calcul des longrines de la voie charretière	101
----	---	-----

69	Calcul des traverses de la voie charretière, des consoles de trottoir et des longrines extérieures de trottoir	102
70	Calcul des contrepoids	102
71	Calcul des longerons et du calage	105
75	Calage le plus favorable pour le poids mort seul.	109
76	Le pont livre passage à la charge roulante	110
77	Charge uniforme équivalente	114
79	Le pont porte la surcharge uniforme	
80-82	Diagramme des maxima, calage trop fort, calage trop faible	119
83	Calage le plus favorable en tenant compte des charges roulantes	123
85	Longerons à section variable	124
86	Calcul des chevêtres.	124
87-92	Calcul du Pivot, Lentilles	126
93	Calcul des mécanismes	133
94	Vent	134
95	Travail de la rotation	134
96	Action du pontier	135
97	Durée de la manœuvre d'ouverture et fermeture	136

FIN
